Problema 2 juliol 2024 País Valencià (àlgebra MACS).

Problema 2. Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Analitzeu si la matriu $A\,B - 2\,I$ és invertible, on I és la matriu identitat d'ordre 3.

(3 punts)

Per determinar si la matriu $AB - 2I$ és invertible, seguirem aquests passos:

1. **Calcular el producte AB**

   Les matrius donades són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Primer, calculem AB. La matriu resultant serà una matriu 3×3.

Realitzem el producte:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per calcular la primera fila de AB:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcular la segona fila de AB:

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per calcular la tercera fila de AB:

$$\begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Així, el producte AB és:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2. **Restar $2I$**

   La matriu identitat d'ordre 3 és:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Per tant, $2I$ és:

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Restem $2I$ de AB:

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 4-0 & 0-0 \\ 0-0 & 2-2 & 3-0 \\ 1-0 & 2-0 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. **Comprovar si la matriu $AB - 2I$ és invertible**

   Per comprovar si la matriu és invertible, calculem el seu determinant. La matriu és:

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   El determinant d'una matriu 3×3 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ es calcula com:

$$\det = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

   Aplicant aquesta fórmula:

$$\det = (-3) \cdot (0 \cdot 7 - 3 \cdot 2) - 4 \cdot (0 \cdot 7 - 3 \cdot 1) + 0 \cdot (0 \cdot 2 - 0 \cdot 1)$$

$$\det = (-3) \cdot (-6) - 4 \cdot (-3)$$

$$\det = 18 + 12 = 30$$

El determinant és 30, que és diferent de zero. Per tant, la matriu $AB - 2I$ és invertible.

b) Determineu la matriu X que és solució de l'equació $A + 2\,X\,C = B^t$, on B^t és la transposada de la matriu B. *(4 punts)*

1. **Calcular la transposada de la matriu B**

   La matriu B és:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   La transposada de B, B^T, és:

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **Substituir les matrius A, B^T, i C a l'equació $A + 2XC = B^T$**

   La matriu A és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriu C és:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'equació a resoldre és:

$$A + 2XC = B^T$$

Substituïm les matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Simplifiquem l'equació:

$$2XC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2XC = \begin{pmatrix} -1-1 & 0-0 \\ 4-0 & 2-1 \\ 0-(-1) & 3-3 \end{pmatrix}$$

$$2XC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividim per 2 per trobar XC:

$$XC = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Resoldre per X**

Després de trobar XC, hem de desfer-nos de C per aïllar X. Apliquem la inversa de C a la dreta:

$$X = XC \cdot C^{-1}$$

Primer calculem la inversa de C:

La matriu C és:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de C és:

$$\det(C) = (3 \cdot 0) - (1 \cdot 1) = -1$$

La inversa de C és:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ara calculem X:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Realitzem el producte de matrius:

$$X = \begin{pmatrix} (-1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) & (-1 \cdot 1 + 0 \cdot -3) \\ (2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1) & (2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot -3) \\ (\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1) & (\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot -3) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 - \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Així que la matriu X que satisfà l'equació $A + 2XC = B^T$ és:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Calculeu per a quins valors de z la matriu $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ compleix la condició $C\,D = D\,C$. *(3 punts)*

Per trobar els valors de z per als quals la matriu D compleix la condició $CD = DC$, seguirem els següents passos:

1. **Definir les matrius C i D**

   La matriu C és:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matriu D és:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$$

2. **Calcular el producte CD**

   Multipliquem C per D:

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$$

   Realitzem el producte:

$$CD = \begin{pmatrix} (3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) & (3 \cdot (-1) + 1 \cdot z) \\ (1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)) & (1 \cdot (-1) + 0 \cdot z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-1) & (-3+z) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & z-3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. **Calcular el producte DC**

   Multipliquem D per C:

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Realitzem el producte:

$$DC = \begin{pmatrix} (1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1) & (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0) \\ (-1 \cdot 3 + z \cdot 1) & (-1 \cdot 1 + z \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-1) & (1-0) \\ (-3+z) & (-1+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z-3 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Igualar CD i DC**

   Per a que $CD = DC$:

$$\begin{pmatrix} 2 & z-3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z-3 & -1 \end{pmatrix}$$

   Igualem les entrades corresponents de les dues matrius:

   - L'entrada superior dreta:

$$z - 3 = 1$$

     Resolent per z:

$$z - 3 = 1 \implies z = 4$$

- L'entrada inferior esquerra:

$$1 = z - 3$$

  Resolent per z:

$$1 = z - 3 \implies z = 4$$

Les dues condicions són consistents i donen el mateix valor de z.

5. **Conclusió**

La matriu D compleix la condició $CD = DC$ si i només si:

$$z = 4$$