

Problema 2. Siguen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Es demana:

- a) Estudiar els valors del paràmetre real a per als quals l'equació matricial $A^2 X = B$ té una única solució.
(5 punts)

Per trobar els valors del paràmetre real a per als quals l'equació matricial $A^2 X = B$ té una única solució, primer hem de determinar quan la matriu A és invertible. Si A és invertible, llavors A^2 també és invertible, i l'equació $A^2 X = B$ tindrà una única solució, que és $X = (A^2)^{-1} B$.

Determinant de A

La matriu A és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriu A serà invertible si el seu determinant és diferent de zero. Calculem el determinant de A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Utilitzem l'expansió de Laplace per calcular el determinant, expandint per la primera fila:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ a & 0 \end{vmatrix}$$

Calculem els determinants de les submatrius 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot a = -2a$$

Així, el determinant de A és:

$$\det(A) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-2a) = 6 - 4a$$

Perquè A sigui invertible, el determinant ha de ser diferent de zero:

$$6 - 4a \neq 0$$

Resolent per a :

$$6 \neq 4a \implies a \neq \frac{6}{4} \implies a \neq \frac{3}{2}$$

Resum

L'equació matricial $A^2X = B$ tindrà una única solució per a tots els valors del paràmetre real a excepte $a = \frac{3}{2}$.

- b) Sabent que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació $A^2X = B$, trobeu el valor de α , β i γ dependent del paràmetre real a . (5 punts)

Donat que el vector $(3, -2, -1)$ és una solució de l'equació $A^2X = B$, podem utilitzar aquesta informació per trobar els valors de α , β , i γ dependent del paràmetre real a .

Considerem les matrius donades:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

i el vector solució:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculant A^2

Primer, hem de calcular A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació matricial:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot a & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot a & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ a \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot a & a \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & a \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

Simplificant els elements de la matriu:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 2 + 6 \\ 3 + 6 + a & 4 & 6 + 2 + 3 \\ a + 3a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 8 \\ 9 + a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix}$$

Utilitzant $A^2X = B$

Sabem que $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ és una solució de $A^2X = B$. Així que substituïm X a l'equació per trobar B :

$$A^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Multipliquem les matrius:

$$\begin{pmatrix} (1+2a) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \\ (9+a) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) \\ 4a \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (2a+9) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Simplifiquem els elements del vector resultant:

1. Per α :

$$\alpha = (1+2a) \cdot 3 + 0 + 8 \cdot (-1) = 3 + 6a - 8 = 6a - 5$$

2. Per β :

$$\beta = (9+a) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) = 27 + 3a - 8 - 11 = 3a + 8$$

3. Per γ :

$$\gamma = 4a \cdot 3 + 0 + (2a+9) \cdot (-1) = 12a - 2a - 9 = 10a - 9$$

Resum

Els valors de α , β i γ depenent del paràmetre real a són:

$$\alpha = 6a - 5$$

$$\beta = 3a + 8$$

$$\gamma = 10a - 9$$