Problema 2 juny 2024 País Valencià (àlgebra MACS).

Problema 2. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es demana que:

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $X^{-1}A + A = B$. *(4 punts)*

Plantejament del Problema

Tenim les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 1: Aïllar $X^{-1}A$

$$X^{-1}A + A = B$$

$$X^{-1}A = B - A$$

Pas 2: Calcular $B - A$

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 3: Trobar la inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de A és:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 4: Calcular X^{-1}

$$X^{-1} = (B - A)A^{-1}$$

Multipliquem les matrius:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas 5: Calcular els Cofactors de X^{-1}

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cofactor C_{11}

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$$

Cofactor C_{12}

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1$$

Cofactor C_{13}

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)(0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 0$$

Cofactor C_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = -1$$

Cofactor C_{22}

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1$$

Cofactor C_{23}

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1$$

Cofactor C_{31}

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1$$

Cofactor C_{32}

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0$$

Cofactor C_{33}

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

Matriu de Cofactors

$$\mathrm{Cof}(X^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 6: Adjunta de X^{-1}

L'adjunta és la transposada de la matriu de cofactors:

$$\mathrm{adj}(X^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 7: Inversa de X^{-1}

$$X = \mathrm{adj}(X^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució Final

La matriu X que satisfà l'equació és:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Trobeu la matriu Y que satisfà l'equació $(A - B)\,Y - A\,Y = I$, on I representa la matriu identitat d'ordre 3. *(4 punts)*

Reescrivim l'equació original:

$$(A - B)Y - AY = I$$

Agrupem termes amb Y:

$$(A - B)Y - AY = I$$

$$AY - BY - AY = I$$

$$-BY = I$$

Resolent per Y:

$$Y = -B^{-1}$$

Per calcular la inversa de la matriu B mitjançant el mètode de Gauss-Jordan, seguirem els següents passos:

Matriu B

La matriu B és:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formació de la Matriu Augmentada

Per aplicar Gauss-Jordan, formem una matriu augmentada amb B a l'esquerra i la matriu identitat I a la dreta:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aplicació de Gauss-Jordan

1. **Fase 1: Normalitzar la primera fila**

   El primer element de la primera fila ja és 1. No cal canviar res.

2. **Eliminar els altres elements de la primera columna**

   - Resta la primera fila de la tercera fila per eliminar el 1 a la posició (3,1):

     $$R3 \leftarrow R3 - R1$$

     Resulta en:

     $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Afegim la segona fila a la tercera fila per eliminar el -1 a la posició (3,2):

$$R3 \leftarrow R3 + R2$$

Resulta en:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3. **Fase 2: Normalitzar la segona fila**

Dividim la tercera fila per 2 per obtenir un 1 a la posició (3,3):

$$R3 \leftarrow \frac{1}{2} R3$$

Resulta en:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

4. **Eliminar els altres elements de la tercera columna**

- Resta la tercera fila de la segona fila per eliminar el 1 a la posició (2,3):

$$R2 \leftarrow R2 - R3$$

Resulta en:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

- Afegim la segona fila a la primera fila per eliminar el 1 a la posició (1,2):

$$R1 \leftarrow R1 - R2$$

Resulta en:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Resultat Final

La matriu augmentada ha estat transformada en la forma de la matriu identitat a l'esquerra i la inversa de B a la dreta:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matriu Y

D'acord amb l'equació $Y = -B^{-1}$:

$$Y = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Trobeu la matriu Z que satisfà l'equació $A\,Z\,A^{-1} = I$. *(2 punts)*

Equació a Resoldre

L'equació és:

$$AZA^{-1} = I$$

Podem simplificar l'equació a:

$$AZA^{-1} = I$$

Multiplicant per A^{-1} a l'esquerra i A a la dreta:

$$A^{-1}(AZA^{-1})A = A^{-1}IA$$

Simplificant, obtenim:

$$(A^{-1}A)Z(A^{-1}A) = A^{-1}A$$

$$IZI = I$$

$$Z = I$$

Resultat

La matriu Z que satisfà l'equació és la matriu identitat I:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$