

Problema 2. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es demana:

a) Estudiar el rang de A en funció del paràmetre real m .

(3 punts)

Tenim la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$$

Determinant de la matriu A

Calculem el determinant de la matriu A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}$$

Aplicarem la regla de Sarrus:

$$\det(A) = 1 \cdot (m \cdot m - 0 \cdot 1) - 2m \cdot (0 \cdot m - 0 \cdot m) + m \cdot (0 \cdot 1 - m \cdot m)$$

$$\det(A) = 1 \cdot (m^2 - 0) - 2m \cdot 0 + m \cdot (0 - m^2)$$

$$\det(A) = m^2 - m^3$$

$$\det(A) = m^2(1 - m)$$

Valors de m que fan que el determinant sigui zero

Per trobar els valors de m que fan que el determinant sigui zero, resollem l'equació:

$$m^2(1 - m) = 0$$

Això es compleix quan:

1. $m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

2. $1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$



Per tant, els valors de m que fan que el determinant sigui zero són $m = 0$ i $m = 1$.

Anàlisi del rang segons el valor de m

Cas 1: $m \neq 0$ i $m \neq 1$

Quan $m \neq 0$ i $m \neq 1$, el determinant $\det(A) \neq 0$. Això implica que la matriu A té rang 3.

Cas 2: $m = 0$

Si $m = 0$, la matriu A es transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu té dues files no nul·les. Per tant, el rang de A és 2.

Cas 3: $m = 1$

Si $m = 1$, la matriu A es transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem el determinant dels menors 2x2 per determinar el rang.

Per a la submatriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinant és:

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1 \neq 0$$

Com aquest determinant és diferent de zero, aquesta submatriu té rang 2. Com que també tenim tres files linealment independents, el rang total de la matriu A quan $m = 1$ és 2.

Resum del rang de A

- Quan $m \neq 0$ i $m \neq 1$, el rang de A és 3.
- Quan $m = 0$, el rang de A és 2.
- Quan $m = 1$, el rang de A és 2.

b) Per a $m = -1$, resolde l'equació matricial $AX = B$.

(4 punts)

Per resoldre l'equació matricial $AX = B$ quan $m = -1$, primer substituïm m a la matriu A .

La matriu A amb $m = -1$ és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(-1) & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I la matriu B és:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Volem trobar la matriu X tal que $AX = B$. Escriu X com:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

Aleshores, l'equació $AX = B$ es transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multipliquem les matrius a l'esquerra:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_{11} + (-2) \cdot x_{21} + (-1) \cdot x_{31} & 1 \cdot x_{12} + (-2) \cdot x_{22} + (-1) \cdot x_{32} \\ 0 \cdot x_{11} + (-1) \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{31} & 0 \cdot x_{12} + (-1) \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{32} \\ (-1) \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{21} + (-1) \cdot x_{31} & (-1) \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{22} + (-1) \cdot x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema de sis equacions lineals amb sis incògnites es pot resoldre igualant els elements corresponents de les matrius:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_{11} - 2 \cdot x_{21} - 1 \cdot x_{31} = 1 \\ 1 \cdot x_{12} - 2 \cdot x_{22} - 1 \cdot x_{32} = 0 \\ -x_{21} = 0 \\ -x_{22} = 1 \\ -x_{11} + x_{21} - x_{31} = 0 \\ -x_{12} + x_{22} - x_{32} = 0 \end{cases}$$

Resolem aquestes equacions una per una:

1. De la tercera equació, $-x_{21} = 0 \Rightarrow x_{21} = 0$.
2. De la quarta equació, $-x_{22} = 1 \Rightarrow x_{22} = -1$.
3. Substituïm x_{21} a la cinquena equació:

$$-x_{11} + 0 - x_{31} = 0 \Rightarrow x_{11} = -x_{31}$$

4. Substituïm x_{22} a la sisena equació:

$$-x_{12} - 1 - x_{32} = 0 \Rightarrow x_{12} + x_{32} = -1$$

5. Substituïm x_{21} i x_{31} a la primera equació:

$$x_{11} - 2 \cdot 0 - x_{31} = 1 \Rightarrow -x_{31} - x_{31} = 1 \Rightarrow -2x_{31} = 1 \Rightarrow x_{31} = -\frac{1}{2}$$

Per tant, $x_{11} = -x_{31} = \frac{1}{2}$.

6. Substituïm x_{22} i x_{32} a la segona equació:

$$x_{12} - 2 \cdot (-1) - x_{32} = 0 \Rightarrow x_{12} + 2 - x_{32} = 0 \Rightarrow x_{12} - x_{32} = -2$$

Ja tenim $x_{11} = \frac{1}{2}$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = -1$, $x_{31} = -\frac{1}{2}$. Per resoldre per x_{12} i x_{32} , sumem i restem les equacions $x_{12} + x_{32} = -1$ i $x_{12} - x_{32} = -2$:

Sumem:

$$(x_{12} + x_{32}) + (x_{12} - x_{32}) = -1 - 2 \Rightarrow 2x_{12} = -3 \Rightarrow x_{12} = -\frac{3}{2}$$

Restem:

$$(x_{12} + x_{32}) - (x_{12} - x_{32}) = -1 + 2 \Rightarrow 2x_{32} = 1 \Rightarrow x_{32} = \frac{1}{2}$$

Per tant, la matriu X és:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Així, la solució de l'equació matricial $AX = B$ per $m = -1$ és:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Per a $m = 0$, calcular A^5 .

(3 punts)

Per resoldre aquesta pregunta, hem de calcular A^5 quan $m = 0$.

Pas 1: Substituïm $m = 0$ a la matriu A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$$

Quan $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 2: Calculem A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 3: Calculem A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 4: Calculem A^4 :

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas 5: Calculem A^5 :

$$A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, quan $m = 0$, la matriu A^5 és:

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$