

P2. — Considera les matrius següents:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sabem que existeix un valor x tal que B és la inversa de A . Quin és aquest valor x ? (3 pt)

Per trobar el valor de x tal que la matriu B sigui la inversa de la matriu A , necessitem utilitzar la definició de matriu inversa. La matriu inversa A^{-1} d'una matriu A compleix la condició següent:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

On I és la matriu identitat. En aquest cas, ens donen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Si B és la inversa de A , llavors:

$$A \cdot B = I$$

On I és la matriu identitat:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Càlcul de $A \cdot B$

Primer, calculem el producte $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació de matrius:

1. Element (1,1) de $A \cdot B$:

$$2 \cdot x + 3 \cdot (-5) = 2x - 15$$

2. Element (1,2) de $A \cdot B$:

$$2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$$

3. Element (2,1) de $A \cdot B$:

$$5 \cdot x + 8 \cdot (-5) = 5x - 40$$

4. Element (2,2) de $A \cdot B$:

$$5 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = -15 + 16 = 1$$

Així que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2x - 15 & 0 \\ 5x - 40 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualar a la matriu identitat

Perquè $A \cdot B = I$, la matriu resultant ha de ser igual a la matriu identitat:

$$\begin{pmatrix} 2x - 15 & 0 \\ 5x - 40 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, igualem cada element:

1. $2x - 15 = 1$
2. $5x - 40 = 0$

Resolució per trobar x

1. Resolent $2x - 15 = 1$:

$$2x - 15 = 1$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

2. Verifiquem $x = 8$ amb $5x - 40 = 0$:

$$5x - 40 = 0$$

$$5 \cdot 8 - 40 = 40 - 40 = 0$$

La solució coincideix.

Resultat

El valor de x que fa que la matriu B sigui la inversa de A és 8.

b) Per al valor x de l'apartat anterior, calcula $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I)$. (4 pt)

Amb el valor $x = 8$ obtingut en l'apartat anterior, calculem l'expressió $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I)$. Primer, definim les matrius amb aquest valor de x :

Matrius donades

1. Matriu A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Matriu B amb $x = 8$:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matriu Identitat I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Càlculs intermigs

1. Calcular $A + I$ i $A - I$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Calcular $B - I$ i $B + I$:

$$B - I = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Càlcul de $(A + I)(B - I)$ i $(A - I)(B + I)$

1. Calcular $(A + I)(B - I)$:

$$(A + I)(B - I) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació:

- Element (1,1):

$$3 \cdot 7 + 3 \cdot (-5) = 21 - 15 = 6$$

- Element (1,2):

$$3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = -9 + 3 = -6$$

- Element (2,1):

$$5 \cdot 7 + 9 \cdot (-5) = 35 - 45 = -10$$

- Element (2,2):

$$5 \cdot (-3) + 9 \cdot 1 = -15 + 9 = -6$$

$$(A + I)(B - I) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Calcular $(A - I)(B + I)$:

$$(A - I)(B + I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Realitzem la multiplicació:

- Element (1,1):

$$1 \cdot 9 + 3 \cdot (-5) = 9 - 15 = -6$$

- Element (1,2):

$$1 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 = -3 + 9 = 6$$

- Element (2,1):

$$5 \cdot 9 + 7 \cdot (-5) = 45 - 35 = 10$$

- Element (2,2):

$$5 \cdot (-3) + 7 \cdot 3 = -15 + 21 = 6$$

$$(A - I)(B + I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Sumem $(A + I)(B - I)$ i $(A - I)(B + I)$

$$(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Realitzem la suma:

- Element (1,1):

$$6 + (-6) = 0$$

- Element (1,2):

$$-6 + 6 = 0$$

- Element (2,1):

$$-10 + 10 = 0$$

- Element (2,2):

$$-6 + 6 = 0$$

$$(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultat

El resultat final és la matriu nul·la:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Existeixen alguns valors per a y, z de manera que C sigui la inversa de A ? (3 pt)

Matrius donades

1. Matriu A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Matriu B (dada com la inversa de A):

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matriu C :

$$C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificació

Comprovació:

Per comprovar si C és la inversa de A , hem de verificar si $A \cdot C$ dona la matriu identitat I :

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Multipliquem:

- Element (1,1): $2y + 3 \cdot 7 = 2y + 21$
- Element (1,2): $2z + 3 \cdot (-1) = 2z - 3$
- Element (2,1): $5y + 8 \cdot 7 = 5y + 56$
- Element (2,2): $5z + 8 \cdot (-1) = 5z - 8$

Així:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2y + 21 & 2z - 3 \\ 5y + 56 & 5z - 8 \end{pmatrix}$$

Perquè $A \cdot C = I$, ha de ser igual a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Això dóna les equacions següents:

1. $2y + 21 = 1$
2. $2z - 3 = 0$
3. $5y + 56 = 0$
4. $5z - 8 = 1$

Resolució:

- Per a y :

- De $2y + 21 = 1$:

$$2y + 21 = 1$$

$$2y = 1 - 21$$

$$2y = -20$$

$$y = -10$$

- Comprovem amb $5y + 56 = 0$:

$$5(-10) + 56 = -50 + 56 = 6$$

Això no és igual a 0, així que $y = -10$ no és correcte.

- Per a z :

- De $2z - 3 = 0$:

$$2z - 3 = 0$$

$$2z = 3$$

$$z = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{3}{2}$$

- Comprovem amb $5z - 8 = 1$:

$$5 \cdot \frac{3}{2} - 8 = \frac{15}{2} - 8 = \frac{15 - 16}{2} = -\frac{1}{2}$$

Això no és igual a 1, així que $z = \frac{3}{2}$ tampoc és correcte.

Conclusió

La inversa d'una matriu és única. Com hem vist, no hi ha valors per a y i z que facin que C sigui la inversa de A .