

P2. — Sigui I_3 la matriu identitat d'ordre 3×3 i A la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [4 punts] Calcula la matriu $B = 3A - kI_3$, indicant la seva expressió en funció del paràmetre real k .

Per calcular la matriu $B = 3A - kI_3$, seguirem els passos següents:

Donades les Matrius

- La matriu A és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriu identitat I_3 d'ordre 3×3 és:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $3A$

Multipliquem la matriu A per 3:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular kI_3

Multipliquem la matriu identitat I_3 per k :

$$kI_3 = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Calcular $B = 3A - kI_3$

Restem kI_3 de $3A$:

$$B = 3A - kI_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Realitzem la resta:

$$B = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & 0-k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

Resultat

La matriu B en funció del paràmetre real k és:

$$B = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

(b) [4 punts] Discuteix el rang de la matriu B segons el paràmetre k .

Per discutir el rang de la matriu B utilitzant determinants, calculem el determinant de B en funció del paràmetre k . El rang de la matriu B pot ser determinat a partir del determinant de B i dels determinants de les submatrius 2×2 .

Matriu B

La matriu B és:

$$B = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

Càlcul del Determinant de B

El determinant de B es calcula com:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{vmatrix}$$

Podem simplificar el càlcul del determinant utilitzant l'expansió per la primera fila, ja que hi ha dos zeros:

$$\det(B) = (3-k) \begin{vmatrix} -k & 0 \\ 3 & 3-k \end{vmatrix}$$

Calcularem el determinant de la submatriu 2×2 :

$$\begin{vmatrix} -k & 0 \\ 3 & 3-k \end{vmatrix} = (-k)(3-k) - (0 \cdot 3) = -k(3-k)$$

Per tant:

$$\det(B) = (3-k) \cdot (-k(3-k)) = -k(3-k)^2$$

Discusió del Rang

1. **Rang de 3:** El rang de la matriu B és 3 si el determinant és diferent de zero. Això ocorre quan:

$$-k(3-k)^2 \neq 0$$

És a dir:

$$k \neq 0 \quad \text{i} \quad 3-k \neq 0$$

$$k \neq 0 \quad \text{i} \quad k \neq 3$$

2. **Rang de 2:** El rang de la matriu B és 2 si el determinant és zero però almenys una de les submatrius 2×2 té determinant diferent de zero. Això ocorre quan:

$$k = 0 \quad \text{o} \quad k = 3$$

Per a aquests casos, calculem els determinants de les submatrius 2×2 :

- Si $k = 0$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinant de les submatrius 2×2 com:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 0 \cdot 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 0 \cdot (-6) = 9$$

El determinant de la submatriu 2×2 és diferent de zero, per tant el rang és 2.

- Si $k = 3$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de les submatrius 2×2 com:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot (-3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 = 0$$

El determinant de les submatrius 2×2 és zero, per tant el rang és 1.

Resum

- Si $k \neq 0$ i $k \neq 3$, el rang de B és 3 perquè el determinant és diferent de zero.
- Si $k = 0$, el rang de B és 2 perquè el determinant de la submatriu 2×2 és diferent de zero.
- Si $k = 3$, el rang de B és 1 perquè el determinant de les submatrius 2×2 és zero i només una submatriu és no nul·la.

(c) [2 punts] Per a quins valors de k es pot calcular la inversa de B ? Justifica la resposta.

Per determinar per quins valors de k es pot calcular la inversa de la matriu B , hem de comprovar quan la matriu B és invertible. Una matriu és invertible si i només si el seu determinant és diferent de zero.

Determinant de B

La matriu B és:

$$B = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

El determinant de B és:

$$\det(B) = -k(3-k)^2$$

Condicions per a la Invertibilitat

La matriu B és invertible si el determinant no és zero:

$$\det(B) = -k(3 - k)^2 \neq 0$$

Anàlisi del Determinant

$$-k(3 - k)^2 \neq 0$$

El determinant serà zero si alguna de les condicions següents es compleix:

1. $k = 0$:

- Si $k = 0$, el determinant és:

$$\det(B) = -0 \cdot (3 - 0)^2 = 0$$

En aquest cas, la matriu B no és invertible.

2. $3 - k = 0$:

- Si $3 - k = 0$, llavors $k = 3$. El determinant serà:

$$\det(B) = -3 \cdot (3 - 3)^2 = -3 \cdot 0 = 0$$

En aquest cas, la matriu B tampoc és invertible.

Resum

La matriu B és invertible per a tots els valors de k excepte:

- $k = 0$
- $k = 3$

Així que la matriu B es pot invertir per a qualsevol valor de k diferent de 0 i 3.