

P2. — Un client ens demana ajuda per invertir un màxim de 10 000 € en dos productes d'inversió diferents: accions i bons. El client vol invertir almenys la mateixa quantitat en accions que en bons. A més, vol invertir entre 2 000 € i 8 000 € en bons; i entre 4 000 € i 6 000 € en accions. L'interès previst per a les accions és d'un 6% anual, mentre que per als bons és d'un 2% anual.

- a) Planteja la maximització de l'interès previst per les inversions com un problema de programació lineal. (3 pt)

Definició de Variables

1. Variables de Decisió:

- x : Quantitat en milers d'euros invertida en accions.
- y : Quantitat en milers d'euros invertida en bons.

Funció Objectiu

Desitgem maximitzar l'interès total obtingut de les inversions. Sabem que:

- L'interès anual de les accions és del 6%, així que l'interès generat per x milers d'euros en accions és $0,06 \cdot 1000x$.
- L'interès anual dels bons és del 2%, així que l'interès generat per y milers d'euros en bons és $0,02 \cdot 1000y$.

La funció objectiu, que és l'interès total, serà:

Maximitzar $Z = 0,06 \cdot 1000x + 0,02 \cdot 1000y = 60x + 20y$

Restriccions

Les condicions i restriccions són les següents:

1. Pressupost Total:

La inversió total no pot superar els 10.000 €, o 10 milers d'euros.

$$x + y \leq 10$$

2. Inversió Mínima en Accions i Bons:

- La quantitat invertida en accions ha de ser almenys igual a la quantitat invertida en bons.

$$x \geq y$$

- La quantitat invertida en bons ha de ser com a mínim 2.000 € (2 milers d'euros) i com a màxim 8.000 € (8 milers d'euros).

$$2 \leq y \leq 8$$

- La quantitat invertida en accions ha de ser com a mínim 4.000 € (4 milers d'euros) i com a màxim 6.000 € (6 milers d'euros).

$$4 \leq x \leq 6$$

Problema de Programació Lineal

Amb les variables de decisió, la funció objectiu i les restriccions definides, el problema de programació lineal queda com segueix:

Maximitzar:

$$Z = 60x + 20y$$

Sota les restriccions:

1. $x + y \leq 10$
2. $x \geq y$
3. $2 \leq y \leq 8$
4. $4 \leq x \leq 6$
5. $x \geq 0$
6. $y \geq 0$

Resum

El problema de maximització de l'interès previst és una tasca de programació lineal en què volem maximitzar la funció Z subjecta a un conjunt de restriccions que limiten les quantitats d'inversió en accions i bons, així com la inversió total, totes expressades en milers d'euros.

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten.

(5 pt)

Dibuix de la Regió Factible

Pas 1: Dibuixar les Rectes

1. $x = 4$: Vertical a $x = 4$
2. $x = 6$: Vertical a $x = 6$
3. $y = 2$: Horitzontal a $y = 2$
4. $y = 8$: Horitzontal a $y = 8$
5. $x = y$: Diagonal passant per l'origen
6. $x + y = 10$: Diagonal passant per $(10, 0)$ i $(0, 10)$

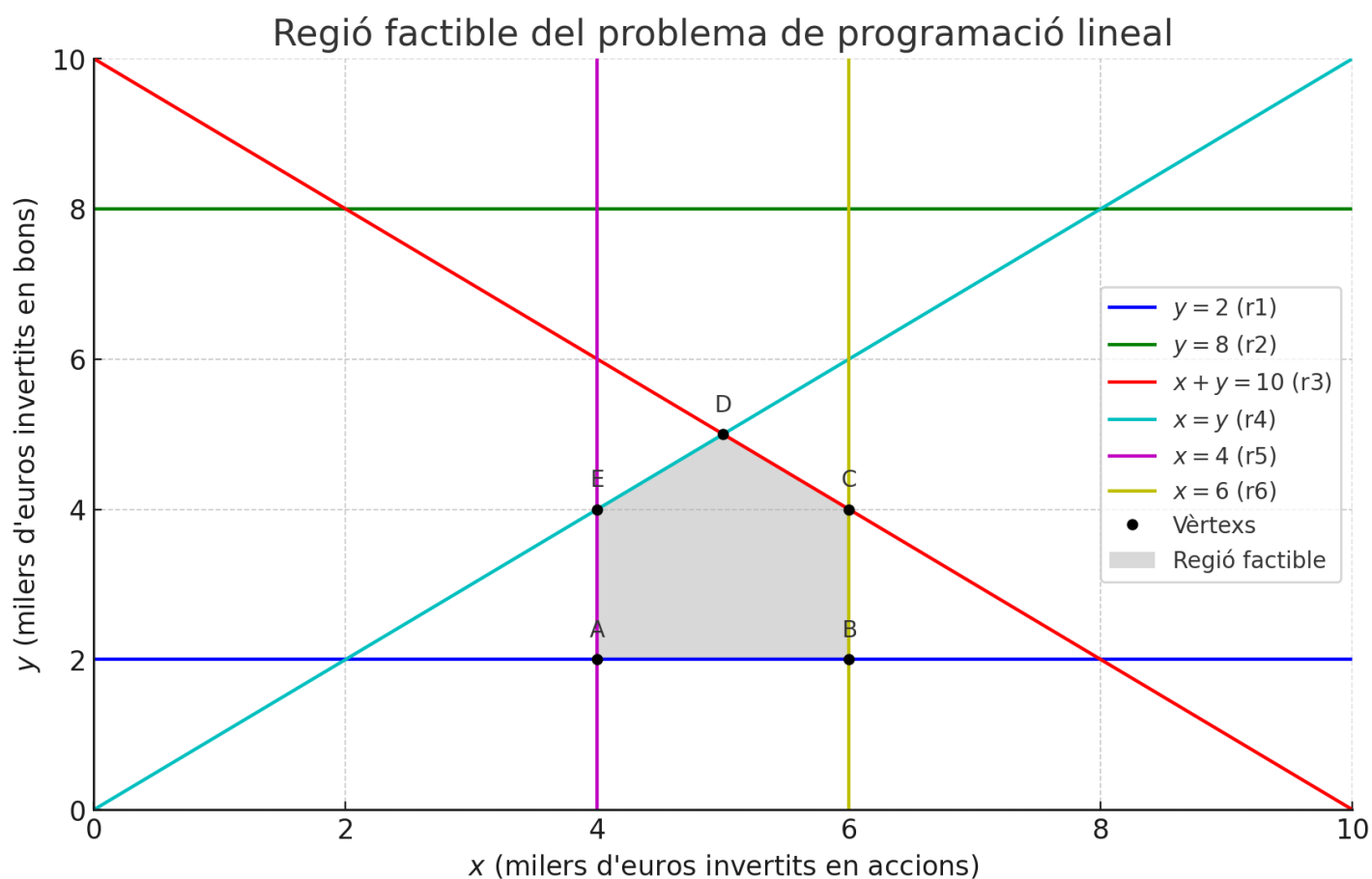
Pas 2: Identificar i Marcar els Vèrtexs

- $(4, 2)$: Intersecció de $x = 4$ i $y = 2$
- $(6, 2)$: Intersecció de $x = 6$ i $y = 2$
- $(6, 4)$: Intersecció de $x = 6$ i $x + y = 10$
- $(5, 5)$: Intersecció de $x + y = 10$ i $x = y$
- $(4, 4)$: Intersecció de $x = 4$ i $x = y$

Pas 3: Sombrejar la Regió Factible

La regió factible és l'àrea delimitada pels vèrtexs vàlids.

Gràfic Esquemàtic:



- c) Quina hauria de ser la inversió en cada tipus de producte per maximitzar l'interès anual previst?
Quants de doblers es generarien amb aquesta inversió? (2 pt)

Funció Objectiu

La funció objectiu és:

$$Z = 0,06x + 0,02y$$

On:

- x és la quantitat invertida en accions (en milers d'euros).
- y és la quantitat invertida en bons (en milers d'euros).

Vèrtexs Vàlids

Els vèrtexs vàlids identificats són:

- A (4, 2)
- B (6, 2)
- C (6, 4)
- D1 (5, 5)
- D2 (4, 4)

Càlcul de l'Interès Anual en Cada Vèrtex

1. Vèrtex A (4, 2):

$$Z = 0,06 \cdot 4 + 0,02 \cdot 2 = 0,24 + 0,04 = 0,28 \text{ milers d'euros}$$

2. Vèrtex B (6, 2):

$$Z = 0,06 \cdot 6 + 0,02 \cdot 2 = 0,36 + 0,04 = 0,40 \text{ milers d'euros}$$

3. Vèrtex C (6, 4):

$$Z = 0,06 \cdot 6 + 0,02 \cdot 4 = 0,36 + 0,08 = 0,44 \text{ milers d'euros}$$

4. Vèrtex D1 (5, 5):

$$Z = 0,06 \cdot 5 + 0,02 \cdot 5 = 0,30 + 0,10 = 0,40 \text{ milers d'euros}$$

5. Vèrtex D2 (4, 4):

$$Z = 0,06 \cdot 4 + 0,02 \cdot 4 = 0,24 + 0,08 = 0,32 \text{ milers d'euros}$$

Resultats

Comparant els valors de Z per cada vèrtex:

- A (4, 2): $Z = 0,28$ milers d'euros $\rightarrow$ 280 €
- B (6, 2): $Z = 0,40$ milers d'euros $\rightarrow$ 400 €
- C (6, 4): $Z = 0,44$ milers d'euros $\rightarrow$ 440 €
- D1 (5, 5): $Z = 0,40$ milers d'euros $\rightarrow$ 400 €
- D2 (4, 4): $Z = 0,32$ milers d'euros $\rightarrow$ 320 €

Inversió Recomanada

Per maximitzar l'interès anual previst, el client hauria d'invertir en el vèrtex C (6, 4):

- 6.000 € en accions
- 4.000 € en bons

Interès Anual Generat

Amb aquesta inversió, l'interès anual generat és:

$$Z = 0,44 \text{ milers d'euros} = 440 \text{ euros}$$

Resum

- **Inversió Recomanada:**
 - Accions: 6.000 €
 - Bons: 4.000 €
- **Interès Anual Generat: 440 €**