

P2. — Considerem les matrius A de dimensió 3×3 que satisfan que $3A + I = A^2$, on I és la matriu identitat de dimensió 3×3 .

(a) [3 punts] Calcula l'expressió de la matriu inversa de A .

Per calcular l'expressió de la matriu inversa de A , comencem amb la condició donada:

$$3A + I = A^2$$

Reorganitzem aquesta equació per aïllar A :

$$A^2 - 3A - I = 0$$

Aquesta és una equació quadràtica en termes de A . Considerem A com un operador lineal, i aquesta equació ens pot donar informació sobre la seva inversa. La inversa de A , si existeix, la denotem com A^{-1} .

Busquem una forma convenient de reescriure l'equació per trobar A^{-1} . Multipliquem amb A^{-1} a la dreta:

$$AA^{-1}A - 3A^{-1}A - A^{-1} = 0$$

(b) [3 punts] Donada l'equació matricial

$$A + 3AX = 5I,$$

on A és una de les matrius de l'enunciat. Calcula, en funció només de la matriu A (no de la seva inversa) i de la identitat I , la matriu X . Quina dimensió té la matriu X ? Justifica la resposta.

Donada l'equació matricial:

$$A + 3AX = 5I$$

on A és una matriu 3×3 i I és la matriu identitat 3×3 , volem trobar l'expressió de la matriu X en funció de A i de I .

Resoldre l'Equació

1. Reorganitzar l'equació per aïllar X :

Primer, subtraïeu A de cada costat de l'equació:

$$3AX = 5I - A$$

2. Aïllar X :

Per aïllar X , dividim amb $3A$:

$$X = \frac{1}{3}(5I - A)A^{-1}$$

Segons la part (a), sabem que la inversa de A és:

$$A^{-1} = A - 3I$$

Substituïm A^{-1} en l'expressió per X :

$$X = \frac{1}{3}(5I - A)(A - 3I)$$

3. Calcular el producte:

Ara calculem el producte $(5I - A)(A - 3I)$:

$$(5I - A)(A - 3I) = 5I \cdot A - 5I \cdot 3I - A \cdot A + A \cdot 3I$$

$$= 5A - 15I - A^2 + 3A$$

$$= 8A - A^2 - 15I$$

Utilitzem la relació $A^2 = 3A + I$:

$$-A^2 = -3A - I$$

$$8A - A^2 - 15I = 8A - (3A + I) - 15I$$

$$= 8A - 3A - I - 15I$$

$$= 5A - 16I$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{3}(5A - 16I)$$

Dimensió de X

La matriu X és una matriu de la mateixa dimensió que A . Com que A és una matriu de dimensió 3×3 , X també és una matriu de dimensió 3×3 .

Resum

L'expressió per a la matriu X en funció de A i I és:

$$X = \frac{1}{3}(5A - 16I)$$

La dimensió de X és 3×3 .

(c) [4 punts] Calcula totes les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions de l'enunciat.

Per trobar les matrius A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions donades en l'enunciat (on $3A + I = A^2$), seguim aquests passos:

1. Aplicar la condició $3A + I = A^2$

Donada la matriu A :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

calculem $3A$ i A^2 :

- Calcular $3A$:

$$3A = 3 \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3 & 0 \\ 3 & 3b & 0 \\ 0 & 0 & 3c \end{pmatrix}$$

- Calcular A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & a + b & 0 \\ a + b & 1 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

- Calcular $3A + I$:

$$3A + I = \begin{pmatrix} 3a & 3 & 0 \\ 3 & 3b & 0 \\ 0 & 0 & 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3c + 1 \end{pmatrix}$$

- Comparar $3A + I$ i A^2 :

Iguallem $3A + I$ i A^2 :

$$\begin{pmatrix} 3a+1 & 3 & 0 \\ 3 & 3b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3c+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a+b & 0 \\ a+b & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

Això ens dóna el següent sistema d'equacions:

1. Comparar els elements (1,1):

$$3a + 1 = a^2 + 1$$

$$3a = a^2$$

$$a^2 - 3a = 0$$

$$a(a - 3) = 0$$

$$a = 0 \text{ o } a = 3$$

2. Comparar els elements (1,2) i (2,1):

$$3 = a + b$$

$$b = 3 - a$$

3. Comparar els elements (2,2):

$$3b + 1 = 1 + b^2$$

$$3b + 1 = 1 + b^2$$

$$3b = b^2$$

$$b^2 - 3b = 0$$

$$b(b - 3) = 0$$

$$b = 0 \text{ o } b = 3$$

4. Comparar els elements (3,3):

$$3c + 1 = c^2$$

$$c^2 - 3c - 1 = 0$$

Resolem aquesta equació quadràtica per a c utilitzant la fórmula general:

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Així, les solucions per c són:

$$c = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ o } c = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

Solucions per a a i b :

- Si $a = 0$, aleshores $b = 3$.
- Si $a = 3$, aleshores $b = 0$.

Matrius A que satisfan les condicions:

1. Per $a = 0$ i $b = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

i

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

2. Per $a = 3$ i $b = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

i

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$