

2. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 2$.

[0,75 punts]

$$f(x) = 1/x \quad f'(x) = -1/x^2,$$

Punt per on passa la recta, $(2, f(2)) = (2, 1/2)$

Pendent de la recta $= f'(2) = -1/4$

$$y - \frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{4}x + 1}$

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = k$, en què k és un nombre real positiu.

[0,75 punts]

$$f(x) = 1/x \quad f'(x) = -1/x^2$$

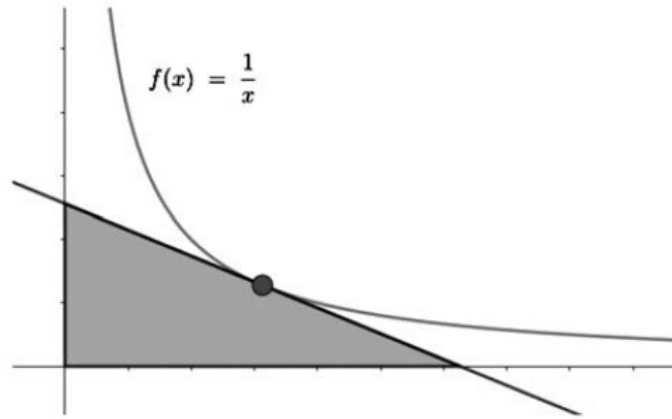
Punt per on passa la recta, $(k, f(k)) = (k, 1/k)$

Pendent de la recta $= f'(k) = -1/k^2$

$$y - \frac{1}{k} = \left(\frac{-1}{k^2}\right) \cdot (x - k) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{k^2}x + \frac{2}{k}}$.

- c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.
[1 punt]



Calculem el punt de tall de la recta tangent $y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$ amb l'eix d'abscisses:

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{Tall amb l'eix d'abscisses} = (2k, 0)$$

Punt de tall de la recta tangent $y = \frac{-x}{k^2} + \frac{2}{k}$ amb l'eix d'ordenades:

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ x &= 0 \end{cases} \quad \text{Tall amb l'eix d'ordenades} = \left(0, \frac{2}{k}\right)$$

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2 \text{ u}^2$$

El triangle té àrea constant igual a 2 unitats de superfície, per a qualsevol valor del paràmetre k .