

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p .
[1,5 punts]

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

El determinant de la matriu de coeficients, A , és:

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -p^3 + 3p^2 - 2p = -p(p-1)(p-2)$$

Els valors de p que fan que el determinant sigui zero són: $p = 0, p = 1$ i $p = 2$.

Aleshores:

- Si $p \neq 0, 1, 2 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat
- Si $p = 0$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A) = 2; \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $p = 1$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A) = 2; \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $p = 2$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{núm. incògnites} = 3 \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat}$$

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.

[1 punt]

Per a $p = 2$ el sistema és compatible indeterminat, dues de les equacions són coincidents. Cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 - z \\ 2x + 2y = 1 - 4z \end{cases}$$

Prenem $z = t$ com a paràmetre i tenim $x = \frac{3}{2} + t$, $y = -3t - 1$, $z = t$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.