

2. Experimentalment s'ha comprovat que la producció d'un tipus de fruita determinat que es cultiva en hivernacles depèn de la temperatura, segons la funció $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, en què x representa la temperatura de l'hivernacle en graus Celsius i $f(x)$ és la producció anual en centenars de quilograms per hectàrea. El preu de venda de la fruita es manté estable a 1,2 euros per cada quilogram.

a) Determineu l'interval de temperatures entre les quals cal mantenir l'hivernacle perquè hi hagi producció de fruita. Calculeu els ingressos anuals per hectàrea si es manté l'hivernacle a 20 °C de temperatura.

[1,25 punts]

La funció f té com a gràfica una paràbola que pren el valor màxim al vèrtex, ja que el coeficient de x^2 és negatiu. Per trobar l'interval de temperatures entre les quals es produeix fruita només cal trobar els zeros de l'equació:

$$-x^2 + 46x - 360 = 0$$

La fórmula de l'equació de segon grau ens dona com a solucions $x = 10$ i $x = 36$, és a dir, que el rang de temperatures entre les quals es produeix fruita és (10, 36).

Si es mantingués l'hivernacle a 20 graus, s'obtidrien anualment $f(20) = 160$ centenars de quilograms per hectàrea i any. Per tant, els ingressos per hectàrea serien de $16.000 \cdot 1,2 = 19.200$ euros.

b) A quina temperatura s'obté la producció màxima de fruita? Quins ingressos per hectàrea s'obtenen en aquest cas?

[1,25 punts]

Per trobar la producció màxima, ens cal trobar el màxim de la funció anterior. Podem fer-ho calculant el vèrtex, o bé amb la funció derivada $f'(x) = -2x + 46$. Els candidats a extrems de la funció es produeixen quan $f'(x) = 0$, per tant, quan $x = 23$. En aquest cas verifiquem fàcilment que $f'(x) > 0$ quan $x < 23$ i que $f'(x) < 0$ quan $x > 23$ i, per tant, en el punt $(23, f(23)) = (23, 169)$ la funció assoleix un màxim. Així doncs, la temperatura que maximitza la producció són 23 graus centígrads, i en aquest cas es produeixen 16.900 quilograms per hectàrea. Els ingressos per hectàrea són de $16.900 \cdot 1,2 = 20.280$ euros.