

2. Considereu la funció $f(x) = \frac{9}{x^2 + x - 2}$.

- a) Determineu el domini, les possibles asímptotes, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de la funció.

[1,25 punts]

- a) La funció $f(x)$ és un quocient de polinomis. Per tant, el seu domini seran tots els nombres reals excepte aquells punts que anul·lin el polinomi denominador.

Si resollem $x^2 + x - 2 = 0$, obtenim $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ i, per tant, el denominador s'anul·la pels valors $x = -2$ i $x = 1$.

Així doncs, tindrem: $\boxed{Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)}$.

Asímtotes verticals: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0$

$$x = -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímtota vertical a } x = -2}$$

$$x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{9}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímtota vertical a } x = 1}$$

Asímtotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{9}{+\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímtota horitzontal a } x = 0}$$

Asímtotes obliqües: com que la funció $f(x)$ té asímtota horitzontal, quan $x \rightarrow \mp\infty$ aleshores $\boxed{f(x) \text{ no té asímtotes obliqües.}}$

Màxims i mínims relatius: són els punts que anul·len la funció derivada.

$$f'(x) = \frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \quad f'(x) = 0? \Rightarrow -9(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Mitjançant el signe de la derivada primera, podem comprovar que a $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ hi ha un $\boxed{\text{màxim relatiu}}$, ja que abans la derivada és positiva ($f'(-1) > 0$) i després és negativa ($f'(0) < 0$).

Pel que fa a la monotonia de la funció, atès que la funció té discontinuïtats asimptòtiques, busquem quin signe té la derivada en els diferents intervals de continuïtat:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	> 0	> 0	< 0	< 0
f	creixent	creixent	decreixent	decreixent

Per tant:

$$f(x) \text{ és creixent a } (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

$$f(x) \text{ és decreixent a } \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

- b)** Calculeu l'equació general de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 4$. Representeu en un mateix gràfic la funció $f(x)$ i la recta tangent.

[1,25 punts]

- b) Per a calcular l'equació general de la recta tangent a la funció, fem servir la fórmula $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ per al cas $a = 4$.

$$f(4) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \text{ la recta passa pel punt } \left(4, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'(4) = \frac{-81}{324} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{La recta tangent serà } \boxed{y = -\frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}.$$

Per a la representació de la funció i de la recta tangent, utilitzem els resultats de l'apartat anterior i es pot complementar amb una petita taula de valors:

