

2. Siguin les funcions $f(x) = x^3 - 9x$ i $g(x) = 7x$.

a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$.

[1,25 punts]

Per trobar els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$, estudiarem la seva derivada: $f'(x) = 3x^2 - 9$

Calculem $f'(x) = 0$, en aquest cas obtenim $3x^2 - 9 = 0$ i per tant, $x = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Com que $f'(x)$ la podem escriure $3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, estudiarem el signe que assoleix la derivada segons els diferents intervals

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3(x+\sqrt{3})$	-	0	+	+	+
$(x - \sqrt{3})$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Creix	Màxim	Decreix	Mínim	Creix

Per tant, la funció creix en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

I la funció decreix en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $x \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.

[1,25 punts]

Trobem els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$ per $x \geq 0$.

Calculem: $x^3 - 9x = 7x$, $x^3 - 9x - 7x = 0$ i per tant, $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = 0$, que s'anul·la en $x = \{0, -4, 4\}$. En el semiplà $x \geq 0$, la funció $f(x)$ i $g(x)$ es tallen en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.

Així doncs, hem de calcular la integral definida:

$$\int_0^4 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^4 (-x^3 + 16x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 16\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 64 - 128 = \boxed{64 u^2}.$$