

Problema 3. Atesa la funció $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$, es demana:

- a) El domini corresponent, i els punts de tall amb els eixos coordenats. (2 punts)

Per resoldre el problema sobre la funció $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$, cal determinar el domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. Anem a veure cada apartat:

a) Dominio de la funció

El domini d'una funció és l'ensemble de valors de x per als quals la funció està ben definida. En aquest cas, la funció és una fracció amb denominador $(3x^2 - 1)^2$.

1. Condició per al denominador:

La funció $f(x)$ està ben definida sempre que el denominador no sigui zero. Per tant, hem de trobar els valors de x per als quals $(3x^2 - 1)^2 \neq 0$. Això es redueix a trobar quan $3x^2 - 1 \neq 0$.

2. Solució de l'equació $3x^2 - 1 = 0$:

Resolem l'equació:

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aquests són els punts en què el denominador es fa zero, i per tant, la funció no està definida en aquests punts.

3. Dominio de $f(x)$:

El domini de la funció $f(x)$ és l'interval real excepte els punts on el denominador és zero. Així que el domini és:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Punts de tall amb els eixos coordenats

1. Tall amb l'eix x :

Per trobar els punts de tall amb l'eix x , cal trobar els punts on $f(x) = 0$. En aquest cas, la funció $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$ mai és igual a zero perquè el numerador és constant i diferent de zero. Així que no hi ha punts de tall amb l'eix x .

2. Tall amb l'eix y :

Per trobar el punt de tall amb l'eix y , cal calcular $f(0)$:

$$f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Així que el punt de tall amb l'eix y és $(0, 1)$.

Resum

- Dominio de la funció: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$
- Punt de tall amb l'eix y : $(0, 1)$
- No hi ha punts de tall amb l'eix x .

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(2 punts)

Asímtotes Verticals

Les asímptotes verticals es produeixen en els punts on la funció no està definida i el denominador tendeix a zero mentre el numerador no és zero. En aquest cas, la funció $f(x)$ no està definida per $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Per tant, hem de verificar si hi ha asímptotes verticals en aquests punts.

1. Punt $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

Quan x s'acosta a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ des de la dreta o des de l'esquerra, el denominador $(3x^2 - 1)^2$ s'aproxima a zero. Com que el denominador s'aproxima a zero i el numerador és constant i no zero, la funció $f(x)$ s'acosta a l'infinit. Per tant, hi ha una asímptota vertical en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Punt $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$:

De manera similar, quan x s'acosta a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ des de la dreta o des de l'esquerra, el denominador $(3x^2 - 1)^2$ també s'aproxima a zero, i la funció $f(x)$ s'aproxima a l'infinit. Així, hi ha una asímptota vertical en $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Asímtotes Horitzontals

Les asímptotes horitzontals es produeixen quan x tendeix a l'infinit o a menys infinit, i es considera el límit de la funció en aquests casos.

1. Límit quan $x \rightarrow \infty$:

Quan x tendeix a l'infinit, el terme $3x^2$ domina sobre el -1 en el denominador. Per tant:

$$(3x^2 - 1)^2 \approx (3x^2)^2 = 9x^4$$

Així que:

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} \approx \frac{1}{9x^4}$$

Quan $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{9x^4}$ tendeix a 0. Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

2. Límit quan $x \rightarrow -\infty$:

El càlcul és similar al cas anterior:

$$f(x) \approx \frac{1}{9x^4}$$

Quan $x \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{9x^4}$ també tendeix a 0. Per tant:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Així que també hi ha una asímptota horitzontal en $y = 0$.

Resum

- **Asímtotes Verticals:** $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- **Asímtotes Horitzontals:** $y = 0$.

c) Els intervals de creixement i decreixement.

(2 punts)

Per trobar els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$, cal seguir els següents passos:

1. Trobar la derivada primera $f'(x)$.
2. Determinar els punts crítics resolent $f'(x) = 0$ i els punts on la derivada no està definida.
3. Analitzar el signe de $f'(x)$ per determinar els intervals de creixement i decreixement.

1. Trobar la derivada primera $f'(x)$

Utilitzarem la regla de la cadena i la regla del quocient per trobar la derivada de $f(x)$.

La funció es pot escriure com:

$$f(x) = (3x^2 - 1)^{-2}$$

Apliquem la regla de la cadena:

$$f'(x) = -2(3x^2 - 1)^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 1)$$

On:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 1) = 6x$$

Per tant:

$$f'(x) = -2(3x^2 - 1)^{-3} \cdot 6x$$

$$f'(x) = -12x(3x^2 - 1)^{-3}$$

$$f'(x) = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

2. Trobar punts crítics i punts on la derivada no està definida

Punts crítics:

Els punts crítics es produeixen quan $f'(x) = 0$. Això ocorre quan el numerador de la derivada és zero:

$$-12x = 0$$

$$x = 0$$

Punts on la derivada no està definida:

La derivada no està definida quan el denominador és zero, que ocorre en $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Tanmateix, aquests punts ja són punts on la funció original no està definida, així que no es consideren punts crítics per a $f(x)$.

3. Analitzar el signe de $f'(x)$

Comprovarem el signe de $f'(x)$ en intervals delimitats pels punts crítics i els punts on la funció no està definida.

- **Interval $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$:**
En aquest interval, $3x^2 - 1 > 0$ (ja que $x^2 > \frac{1}{3}$), i $x < 0$. Així que el numerador $-12x$ és positiu i el denominador $(3x^2 - 1)^3$ és positiu. Per tant, $f'(x)$ és positiu, indicant que $f(x)$ és creixent en aquest interval.
- **Interval $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$:**
En aquest interval, $3x^2 - 1 < 0$ (ja que $x^2 < \frac{1}{3}$), i $x < 0$. Així que el numerador $-12x$ és positiu i el denominador $(3x^2 - 1)^3$ és negatiu. Per tant, $f'(x)$ és negatiu, indicant que $f(x)$ és decreixent en aquest interval.
- **Interval $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$:**
En aquest interval, $3x^2 - 1 < 0$ (ja que $x^2 < \frac{1}{3}$), i $x > 0$. Així que el numerador $-12x$ és negatiu i el denominador $(3x^2 - 1)^3$ és negatiu. Per tant, $f'(x)$ és positiu, indicant que $f(x)$ és creixent en aquest interval.
- **Interval $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$:**
En aquest interval, $3x^2 - 1 > 0$ (ja que $x^2 > \frac{1}{3}$), i $x > 0$. Així que el numerador $-12x$ és negatiu i el denominador $(3x^2 - 1)^3$ és positiu. Per tant, $f'(x)$ és negatiu, indicant que $f(x)$ és decreixent en aquest interval.

Resum dels intervals de creixement i decreixement

- **Interval de creixement:**

$$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

- **Interval de decreixement:**

$$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$$

d) Els màxims i mínims locals, si n'hi ha.

(2 punts)

Per determinar els màxims i mínims locals de la funció $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$, cal seguir aquests passos:

1. **Trobar els punts crítics** resolent $f'(x) = 0$.
2. **Determinar la naturalesa dels punts crítics** utilitzant la segona derivada $f''(x)$ o la prova de la primera derivada per identificar si són màxims o mínims locals.

1. Trobar els punts crítics

Ja hem trobat que els punts crítics es produeixen quan $f'(x) = 0$. La derivada primera és:

$$f'(x) = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

Els punts crítics es produeixen quan el numerador és zero:

$$-12x = 0 \implies x = 0$$

2. Determinar la naturalesa dels punts crítics

a) Utilitzant la segona derivada $f''(x)$

Cal trobar la segona derivada de $f(x)$ i avaluar-la en els punts crítics.

La derivada primera és:

$$f'(x) = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

Utilitzem la regla del quocient per trobar la segona derivada $f''(x)$. La derivada del quocient és:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(-12x) - (-12x) \cdot \frac{d}{dx}[(3x^2 - 1)^3]}{(3x^2 - 1)^6}$$

Calcular les derivades parcials:

1. $\frac{d}{dx}(-12x) = -12$
2. $\frac{d}{dx}[(3x^2 - 1)^3] = 3 \cdot (3x^2 - 1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 1) = 3 \cdot (3x^2 - 1)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2 - 1)^2$

Ara substituïm en la fórmula de la derivada del quocient:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 1)^3 \cdot (-12) - (-12x) \cdot 18x(3x^2 - 1)^2}{(3x^2 - 1)^6}$$

$$f''(x) = \frac{-12(3x^2 - 1)^3 + 216x^2(3x^2 - 1)^2}{(3x^2 - 1)^6}$$

$$f''(x) = \frac{-12(3x^2 - 1) + 216x^2}{(3x^2 - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-36x^2 + 12 + 216x^2}{(3x^2 - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{180x^2 + 12}{(3x^2 - 1)^4}$$

Evaluem $f''(x)$ en $x = 0$:

$$f''(0) = \frac{180 \cdot 0^2 + 12}{(3 \cdot 0^2 - 1)^4} = \frac{12}{(-1)^4} = 12$$

La segona derivada en $x = 0$ és positiva, així que $x = 0$ és un mínim local.

Resum

- **Mínim local:** $x = 0$. Per trobar el valor de la funció en aquest punt, calculem:

$$f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

- **No hi ha màxims locals** perquè la funció és decreixent cap als extrems i no hi ha altres punts crítics.

Resum final

- **Mínim local:** $(0, 1)$
- **No hi ha màxims locals.**

e) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats anteriors. (2 punts)

Per fer la representació gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$ a partir dels resultats anteriors, cal considerar tots els elements clau trobats:

1. **Domini:** $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$
2. **Asímtotes verticals:** $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. **Asímtota horitzontal:** $y = 0$
4. **Punt de tall amb l'eix y:** $(0, 1)$
5. **Intervals de creixement i decreixement:**
 - Creixement en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$
 - Decreixement en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
6. **Mínim local:** $(0, 1)$

Ara podem representar gràficament la funció tenint en compte aquestes característiques.

