

Problema 3. Es donen les rectes $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$ i $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Es demana:

- a) Comprovar que es tallen i calcular les coordenades del punt P d'intersecció. (5 punts)

Per comprovar si les rectes r i s es tallen, utilitzarem el determinant. Les rectes es donen per les següents equacions:

$$\begin{aligned} r : \frac{x-1}{1} &= \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} \\ s : \frac{x-3}{-2} &= \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{aligned}$$

Els vectors directors de les rectes són:

- Per la recta r : $\mathbf{v}_r = (1, 1, 2)$
- Per la recta s : $\mathbf{v}_s = (-2, -1, 2)$

Triem dos punts qualsevols en cada recta. Un punt en la recta r és $A = (1, 2, 1)$ i un punt en la recta s és $B = (3, 3, -1)$.

Calculem el vector que va de A a B :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, 3 - 2, -1 - 1) = (2, 1, -2)$$

Construïm la matriu amb els vectors $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_s$ i $\overrightarrow{AB}$:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Calculem el determinant de la matriu M :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Descomponem el càlcul:

$$= 1 \cdot ((-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 1) - 1 \cdot ((-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 2) + 2 \cdot ((-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 2)$$

$$= 1 \cdot (2 - 2) - 1 \cdot (4 - 4) + 2 \cdot (-2 + 2)$$

$$= 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

El determinant és zero, així que les rectes es tallen.

Per trobar les coordenades del punt d'intersecció, utilitzem els paràmetres que vam calcular anteriorment: $t = 0$ per la recta r i $u = 1$ per la recta s . Substituïm $t = 0$ en les equacions de la recta r :

$$x = 1 + 0 = 1$$

$$y = 2 + 0 = 2$$

$$z = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

Per tant, les rectes es tallen en el punt $P = (1, 2, 1)$.

b) Determinar l'equació de la recta que passa per P i és perpendicular a r i a s . (5 punts)

Determinar l'equació de la recta perpendicular a r i s que passa per P

Per determinar l'equació de la recta que passa pel punt $P = (1, 2, 1)$ i és perpendicular a les rectes r i s , hem de seguir aquests passos:

1. Identificar els vectors directors de les rectes r i s

Les rectes r i s tenen els següents vectors directors:

- Per la recta r : $\mathbf{v}_r = (1, 1, 2)$
- Per la recta s : $\mathbf{v}_s = (-2, -1, 2)$

2. Trobar el vector perpendicular a ambdues rectes

Un vector perpendicular a dues rectes ha de ser perpendicular als seus vectors directors. Per trobar aquest vector, utilitzem el producte vectorial (o producte cru) de $\mathbf{v}_r$ i $\mathbf{v}_s$.

El producte vectorial $\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s$ es calcula com:

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Descomponem aquest determinant:

$$\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s = \mathbf{i}(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) - \mathbf{j}(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) + \mathbf{k}(1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2))$$

$$= \mathbf{i}(2 + 2) - \mathbf{j}(2 + 4) + \mathbf{k}(-1 + 2)$$

$$= \mathbf{i} \cdot 4 - \mathbf{j} \cdot 6 + \mathbf{k} \cdot 1$$

$$= (4, -6, 1)$$

Per tant, el vector $\mathbf{v}_n = (4, -6, 1)$ és perpendicular tant a $\mathbf{v}_r$ com a $\mathbf{v}_s$.

3. Determinar l'equació de la recta

Amb el vector perpendicular $\mathbf{v}_n = (4, -6, 1)$ i passant pel punt $P = (1, 2, 1)$, podem escriure l'equació de la recta en forma simètrica com:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 1}{1}$$

4. Equacions paramètriques

Per convertir aquesta equació simètrica en forma paramètrica, introduïm un paràmetre t i expressarem les coordenades x , y i z en termes de t :

$$x = 1 + 4t$$

$$y = 2 - 6t$$

$$z = 1 + t$$

Resum

L'equació de la recta que passa pel punt $P = (1, 2, 1)$ i és perpendicular a les rectes r i s és:

- Forma simètrica:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 1}{1}$$

- Forma paramètrica:

$$x = 1 + 4t$$

$$y = 2 - 6t$$

$$z = 1 + t$$