

Problema 3. Es considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ i el pla $\pi: 3x - my + z = 1$. Es demana:

- a) Determinar el valor del paràmetre real m perquè r i π siguin paral·lels. Obtenir a més els valors de m per als quals el pla π conté la recta r . (4 punts)

La recta r està donada per la seva forma paramètrica:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$$

Això es pot expressar en termes d'un paràmetre t :

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 1, \quad z = -t - 2$$

El vector direcció de la recta r és:

$$\vec{v} = \langle 2, 3, -1 \rangle$$

El pla π està donat per l'equació:

$$3x - my + z = 1$$

El vector normal al pla π és:

$$\vec{n} = \langle 3, -m, 1 \rangle$$

Condicció de paral·lelisme:

Perquè la recta r i el pla π siguin paral·lels, el vector direcció de la recta $\vec{v}$ ha de ser perpendicular al vector normal del pla $\vec{n}$. Això implica que el producte escalar dels dos vectors ha de ser zero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

Calculant el producte escalar:

$$\langle 2, 3, -1 \rangle \cdot \langle 3, -m, 1 \rangle = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-m) + (-1) \cdot 1 = 6 - 3m - 1 = 0$$

Resolent per m :

$$5 - 3m = 0 \implies m = \frac{5}{3}$$

Per tant, la recta r i el pla π seran paral·lels quan $m = \frac{5}{3}$.

Condicció de contenir la recta:

Perquè el pla π contingui la recta r , tots els punts de la recta han de satisfer l'equació del pla. Substituïm les expressions paramètriques de la recta en l'equació del pla:

$$3(2t + 1) - m(3t - 1) + (-t - 2) = 1$$

Simplificant:

$$6t + 3 - 3mt + m - t - 2 = 1$$

Aplegant termes semblants:

$$(6 - 3m - 1)t + (3 + m - 2) = 1$$

$$(5 - 3m)t + (m + 1) = 1$$

Perquè això sigui cert per a qualsevol valor de t , els coeficients de t i el terme independent han de satisfer les següents condicions:

$$5 - 3m = 0 \quad \text{i} \quad m + 1 = 1$$

Ja hem resolt $5 - 3m = 0 \implies m = \frac{5}{3}$.

Ara comprovem el segon terme:

$$m + 1 = 1 \implies m = 0$$

Aquí veiem que tenim una contradicció: per una banda, m hauria de ser $\frac{5}{3}$ perquè els termes amb t siguin nuls, però també hauria de ser 0 perquè el terme constant s'iguali a 1. Això demostra que no hi ha cap valor de m que permeti que tots els punts de la recta satisfacin simultàniament l'equació del pla.

Així doncs, la recta r no pot estar continguda en el pla π per cap valor de m .

Resum

- r i π són paral·lels quan $m = \frac{5}{3}$.
- No existeix cap valor de m tal que el pla π continga la recta r .

b) Per als valors m de l'apartat anterior, trobar un pla paral·lel a π , que continga la recta r . (3 punts)

Per trobar un pla paral·lel al pla π que contingui la recta r , primer recordem que el pla π està donat per l'equació:

$$3x - my + z = 1$$

I hem determinat que la recta r és paral·lela al pla π quan $m = \frac{5}{3}$.

Aleshores, el pla π per $m = \frac{5}{3}$ té l'equació:

$$3x - \frac{5}{3}y + z = 1$$

Un pla paral·lel a aquest tindrà la mateixa normal, per tant, tindrà la forma:

$$3x - \frac{5}{3}y + z = k$$

El que hem de fer ara és determinar el valor de k de manera que el pla contingui la recta r . Per a això, substituïm un punt qualsevol de la recta r en aquesta equació.

La recta r està donada en forma paramètrica com:

$$x = 2t + 1$$

$$y = 3t - 1$$

$$z = -t - 2$$

Podem agafar un punt específic de la recta r per trobar k . Si $t = 0$, el punt és $(1, -1, -2)$.

Substituïm aquest punt en l'equació del pla:

$$3(1) - \frac{5}{3}(-1) + (-2) = k$$

$$3 + \frac{5}{3} - 2 = k$$

$$3 + \frac{5}{3} - 2 = k$$

$$1 + \frac{5}{3} = k$$

$$\frac{3}{3} + \frac{5}{3} = k$$

$$\frac{8}{3} = k$$

Per tant, el pla paral·lel a π que conté la recta r té l'equació:

$$3x - \frac{5}{3}y + z = \frac{8}{3}$$

Multipliquem tots els termes per 3:

$$3(3x) - 3\left(\frac{5}{3}y\right) + 3z = 3\left(\frac{8}{3}\right)$$

Això dóna:

$$9x - 5y + 3z = 8$$

Per tant, l'equació del pla paral·lel a π que conté la recta r és:

$$9x - 5y + 3z = 8$$

Resum:

Per als valors $m = \frac{5}{3}$ de l'apartat anterior, un pla paral·lel a π que contingui la recta r té l'equació:

$$9x - 5y + 3z = 8$$

c) Calcular, en funció de m , la distància entre π i el punt $P = (1, -1, -2)$. (3 punts)

Per calcular la distància entre el punt $P = (1, -1, -2)$ i el pla $\pi : 3x - my + z = 1$, utilitzem la fórmula de la distància entre un punt i un pla:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

On (x_1, y_1, z_1) és el punt P , $Ax + By + Cz + D = 0$ és l'equació del pla, i (A, B, C) són els coeficients de les variables en l'equació del pla.

L'equació del pla π és:

$$3x - my + z = 1$$

Que podem reescriure com:

$$3x - my + z - 1 = 0$$

Aquí, $A = 3$, $B = -m$, $C = 1$, i $D = -1$. El punt $P = (1, -1, -2)$ té coordenades $(x_1, y_1, z_1) = (1, -1, -2)$.

Substituïm aquests valors en la fórmula de la distància:

$$d = \frac{|3(1) + (-m)(-1) + 1(-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}}$$

Simplifiquem el numerador:

$$3(1) + m - 2 - 1 = 3 + m - 2 - 1 = m$$

Simplifiquem el denominador:

$$\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + m^2 + 1} = \sqrt{m^2 + 10}$$

Per tant, la distància d és:

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Resum:

La distància entre el punt $P = (1, -1, -2)$ i el pla $\pi : 3x - my + z = 1$ en funció de m és:

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$