

P3. — Una empresa produeix dos tipus de productes: aspiradores i bateries elèctriques.

- Per produir una aspiradora, necessitam 5 h d'un operari i 4 kg de matèries primeres.
- Per produir una bateria, necessitam 1 h d'un operari i 1 kg de matèries primeres.

Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria, per 22 €. Disposam d'un màxim de 110 hores d'operaris i de 100 kg de matèries primeres. Suposarem que vendrem tota la producció.

a) Quantes unitats de cada tipus hem de produir per maximitzar els ingressos? (8 pt)

Per maximitzar els ingressos en la producció d'aspiradores i bateries, podem utilitzar la programació lineal. Anem a definir les variables i formular el problema.

Definició de Variables

- Sigui x el nombre d'aspiradores produïts.
- Sigui y el nombre de bateries produïdes.

Funció Objectiu

Volem maximitzar els ingressos. Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria per 22 €. Així, la funció objectiu per maximitzar és:

$$Z = 100x + 22y$$

Restriccions

1. Restricció de temps d'operaris:

Cada aspiradora necessita 5 hores d'operari i cada bateria necessita 1 hora d'operari. Disposem de 110 hores d'operari:

$$5x + y \leq 110$$

2. Restricció de matèries primeres:

Cada aspiradora necessita 4 kg de matèries primeres i cada bateria necessita 1 kg de matèries primeres. Disposem de 100 kg de matèries primeres:

$$4x + y \leq 100$$

3. Restriccions no negatives:

El nombre de productes no pot ser negatiu:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Resolució

Podem resoldre aquest problema mitjançant el mètode gràfic o utilitzant eines de programació lineal com el mètode simplex. Aquí us mostraré la resolució gràfica:

1. Dibuixar les rectes de les restriccions:

- Restricció 1 (temps d'operari):

$$5x + y = 110$$

$$\text{Si } x = 0, y = 110.$$

$$\text{Si } y = 0, x = 22.$$

- Restricció 2 (matèries primeres):

$$4x + y = 100$$

$$\text{Si } x = 0, y = 100.$$

$$\text{Si } y = 0, x = 25.$$

2. Trobar la intersecció de les dues rectes:

Resolent el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 5x + y = 110 \\ 4x + y = 100 \end{cases}$$

Restem la segona equació de la primera:

$$\begin{aligned} (5x + y) - (4x + y) &= 110 - 100 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Substituïm $x = 10$ en la segona equació:

$$\begin{aligned} 4(10) + y &= 100 \\ 40 + y &= 100 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

La intersecció és $(10, 60)$.

3. **Determinar els punts d'intersecció amb els eixos i el punt de intersecció:**

- $(0, 100)$
- $(22, 0)$
- $(10, 60)$

4. **Avaluar la funció objectiu en els punts extrem:**

- $(0, 100)$:

$$Z = 100(0) + 22(100) = 2200$$

- $(22, 0)$:

$$Z = 100(22) + 22(0) = 2200$$

- $(10, 60)$:

$$Z = 100(10) + 22(60) = 1000 + 1320 = 2320$$

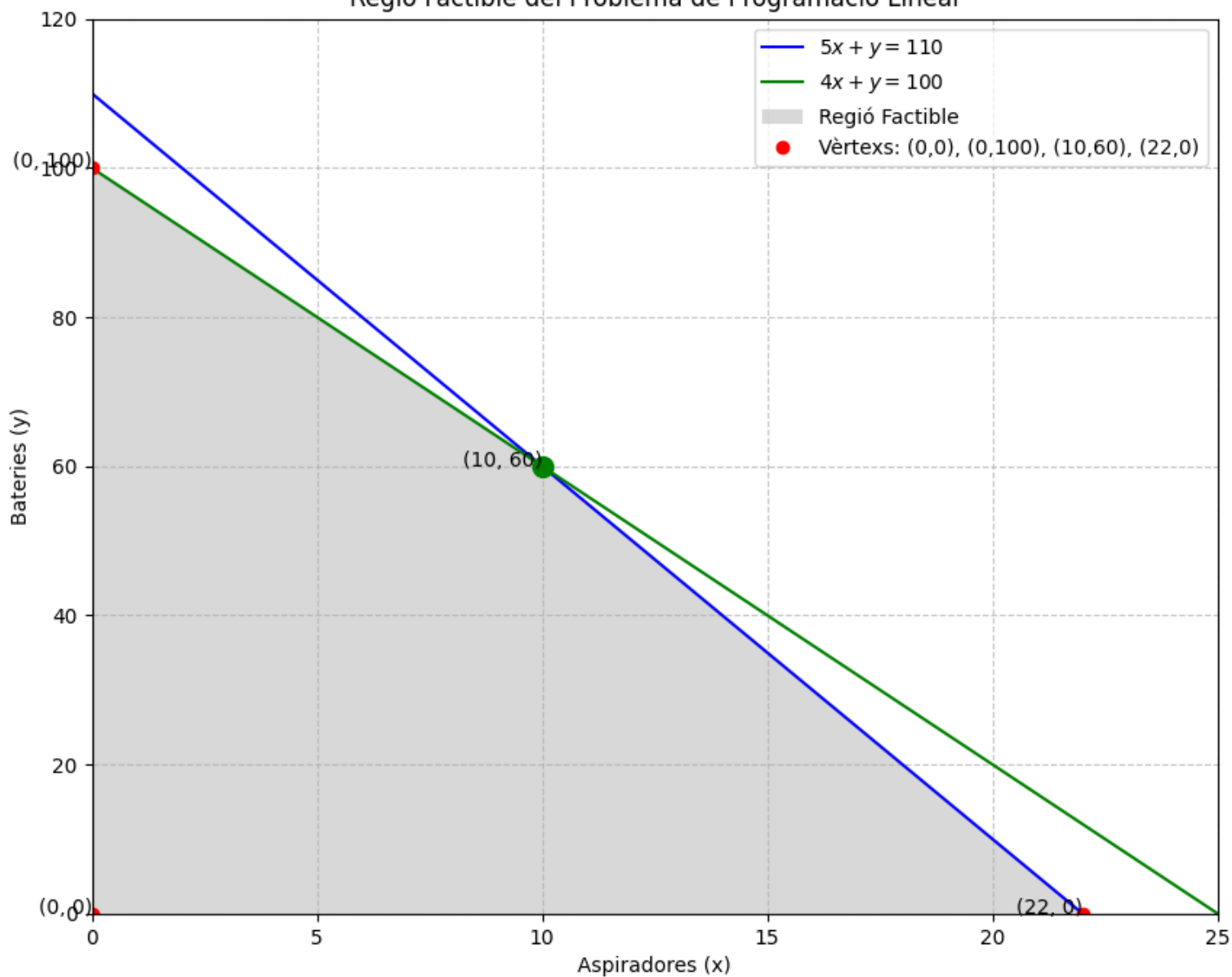
Solució Òptima

El punt que maximitza la funció objectiu és $(10, 60)$ amb uns ingressos de 2320 €.

Per tant, per maximitzar els ingressos, l'empresa ha de produir:

- 10 aspiradores
- 60 bateries

Regió Factible del Problema de Programació Lineal



- b) Si el preu de venda de les aspiradores va disminuint, hi haurà un moment en què serà més rendible fabricar només bateries. Calcula quin és el preu de venda que han de tenir les aspiradores, de manera que el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. (2 pt)

Per determinar el preu de venda de les aspiradores en el qual resulta més rendible fabricar només bateries, necessitem seguir aquests passos:

1. Formulació del Problema:

- Definim el preu de venda de les aspiradores com p euros.
- El benefici per unitat de cada aspiradora és $p - 5$ euros (ja que cada aspiradora costa 5 euros per produir en hores d'operari).
- El benefici per unitat de cada bateria és de 22 euros (no cal cap ajustament addicional).

2. Funció Objectiu:

- El benefici total en funció del nombre d'aspiradores (x) i bateries (y) és:

$$B = p \cdot x + 22 \cdot y$$

3. Restriccions:

- Hores d'operari disponibles: $5x + y \leq 110$
- Matèries primeres disponibles: $4x + y \leq 100$
- No-negativitat: $x \geq 0$ i $y \geq 0$

4. Punt de Solució Óptima Actual:

- Ja hem determinat que el punt de solució òptima actual és (10, 60).
- En aquest punt, el benefici total actual és:

$$B = p \cdot 10 + 22 \cdot 60$$

$$B = 10p + 1320$$

5. Benefici Total si Només es Produïxen Bateries:

- Quan només es produeixen bateries, el nombre de bateries màxim és trobat resolent les restriccions amb $x = 0$:

$$y \leq 100$$

- El benefici total quan només es produeixen bateries és:

$$B_{\text{bateries}} = 22 \cdot 100$$

$$B_{\text{bateries}} = 2200$$

6. Condició per Fabricar Només Bateries:

- Volem trobar el preu p tal que el benefici total amb només aspiradores sigui igual al benefici total amb només bateries.
- El benefici total amb només aspiradores (quan x és màxim i y és mínim o 0) és:

$$B_{\text{aspiradores}} = p \cdot 22$$

- Per que fabricar només bateries sigui més rendible:

$$10p + 1320 < 2200$$

- Resolent per p :

$$10p + 1320 < 2200$$

$$10p < 880$$

$$p < 88$$

Resultat Final

El preu de venda de les aspiradores ha de ser **menor de 88 euros** perquè sigui més rendible fabricar només bateries.