

P3. — Siguin $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ i $R = (-4, 1, 5)$ punts de $\mathbb{R}^3$.

(a) [3 punts] Demuestra que els tres punts formen un triangle rectangle. Indica quin dels 3 angles és recte.

Per demostrar que els punts $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ i $R = (-4, 1, 5)$ formen un triangle rectangle, hem de verificar si algun dels angles del triangle format per aquests punts és un angle de 90 graus. Per fer-ho, utilitzarem el criteri del producte escalar: dos vectors són perpendiculars si el seu producte escalar és igual a zero.

Càlcul dels Vectors del Triangle

Primer, calculem els vectors que representen les arestes del triangle format per aquests punts:

1. Vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (7 - (-1), 1 - 1, 7 - 1) = (8, 0, 6)$$

2. Vector $\overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-4 - (-1), 1 - 1, 5 - 1) = (-3, 0, 4)$$

3. Vector $\overrightarrow{QR}$:

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (-4 - 7, 1 - 1, 5 - 7) = (-11, 0, -2)$$

Càlcul del Producte Escalar

Per comprovar si els vectors són perpendiculars, calculem els productes escalar dels vectors:

1. Producte escalar $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (8, 0, 6) \cdot (-3, 0, 4) = 8 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 4 = -24 + 24 = 0$$

Ja que el producte escalar és zero, els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ són perpendiculars. Això significa que l'angle entre aquests dos vectors és un angle de 90 graus.

Determinació de Quin Angle és Recte

Com que $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$, els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ són perpendiculars, i així l'angle entre $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ és un angle recte.

Per tant, el triangle format pels punts P , Q i R és un triangle rectangle, amb l'angle recte a P , ja que els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ són perpendiculars.

(b) [3 punts] Es podria construir un quadrat afegint un únic nou vèrtex? Justifica la resposta.

Per determinar si és possible construir un quadrat afegint un únic nou vèrtex als punts donats $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ i $R = (-4, 1, 5)$, podem seguir els següents passos senzills:

1. Distància entre P i Q :

$$\begin{aligned}\text{Distància}(P, Q) &= \sqrt{(7 - (-1))^2 + (1 - 1)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{8^2 + 0^2 + 6^2} = \\ &= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10\end{aligned}$$

2. Distància entre P i R :

$$\begin{aligned}\text{Distància}(P, R) &= \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (1 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

3. Distància entre Q i R :

$$\begin{aligned}\text{Distància}(Q, R) &= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (1 - 1)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{(-11)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \\ &= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

Pas 2: Identificar les condicions per formar un quadrat

- En un quadrat, totes les arestes són iguals.
- Les diagonals d'un quadrat són iguals i són més llargues que les arestes.

Les distàncies calculades entre els punts són:

- P a Q : 10
- P a R : 5
- Q a R : $5\sqrt{5}$

Cap de les distàncies no és igual a les altres, per tant, els punts P , Q i R no són tots vèrtexs d'un quadrat.

Conclusió

No es pot construir un quadrat afegint només un vèrtex a partir dels punts donats P , Q i R . Els punts donats no compleixen les condicions d'un quadrat, ja que les distàncies entre els punts no són totes iguals ni compleixen les condicions de diagonals iguals i més llargues que les arestes.

(c) [4 punts] Prova que, per a qualsevol valor de a real, el punt $S = (a, 1, 0)$ és coplanari amb P , Q i R .

Per provar que el punt $S = (a, 1, 0)$ és coplanari amb els punts $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ i $R = (-4, 1, 5)$ utilitzant els vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PS}$, seguirem aquests passos:

Passos per Verificar la Coplanaritat

1. Calcular els vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PS}$:

- Vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (7 - (-1), 1 - 1, 7 - 1) = (8, 0, 6)$$

- Vector $\overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-4 - (-1), 1 - 1, 5 - 1) = (-3, 0, 4)$$

- Vector $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PS} = S - P = (a - (-1), 1 - 1, 0 - 1) = (a + 1, 0, -1)$$

2. Formar la matriu amb aquests vectors:

Construïm una matriu amb els vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PS}$ com a files:

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \\ a+1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calcular el determinant:

El determinant de la matriu formada per aquests vectors ens dirà si els vectors són linealment dependents (cosa que implicaria que els punts són coplanaris). Si el determinant és zero, els vectors són coplanaris.

El determinant es calcula així:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \\ a+1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Expandim el determinant utilitzant la primera fila:

$$\det(M) = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ a+1 & -1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculem cada un dels determinants 2×2 :

- Determinant de la primera matriu 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (0 \cdot (-1)) - (4 \cdot 0) = 0$$

- Determinant de la segona matriu 2×2 :

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 0) - (0 \cdot (a+1)) = 0$$

Substituint els determinants calculats:

$$\det(M) = 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$$

Conclusió

Com que el determinant és zero, els vectors $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PS}$ són linealment dependents. Això implica que els punts P , Q , R i S són coplanaris per a qualsevol valor de a . Per tant, el punt $S = (a, 1, 0)$ és coplanari amb P , Q i R independentment del valor de a .