

P3. — Considera la funció $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$ i indica'n el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.

Indicació: per facilitar l'apartat b), l'eix horitzontal hauria d'arribar fins a $x = 30$. (7 pt)

Domini

La funció $f(x) = \sqrt{x}$ està definida per a $x \geq 0$:

Domini : $[0, +\infty)$

Comportament en els extrems del domini

- En $x = 0$: $f(0) = \sqrt{0} = 0$. El valor de la funció és 0.

- Límit quan x tendeix a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

La funció tendeix a $+\infty$ a mesura que x augmenta sense límit.

Intervals de creixement i decreixement

La funció $f(x) = \sqrt{x}$ és creixent en tot el seu domini. La derivada de la funció és positiva en el domini, per tant, la funció és monòtonament creixent.

- Derivada de la funció:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La derivada és positiva per a $x > 0$, per tant, la funció és creixent en $[0, +\infty)$.

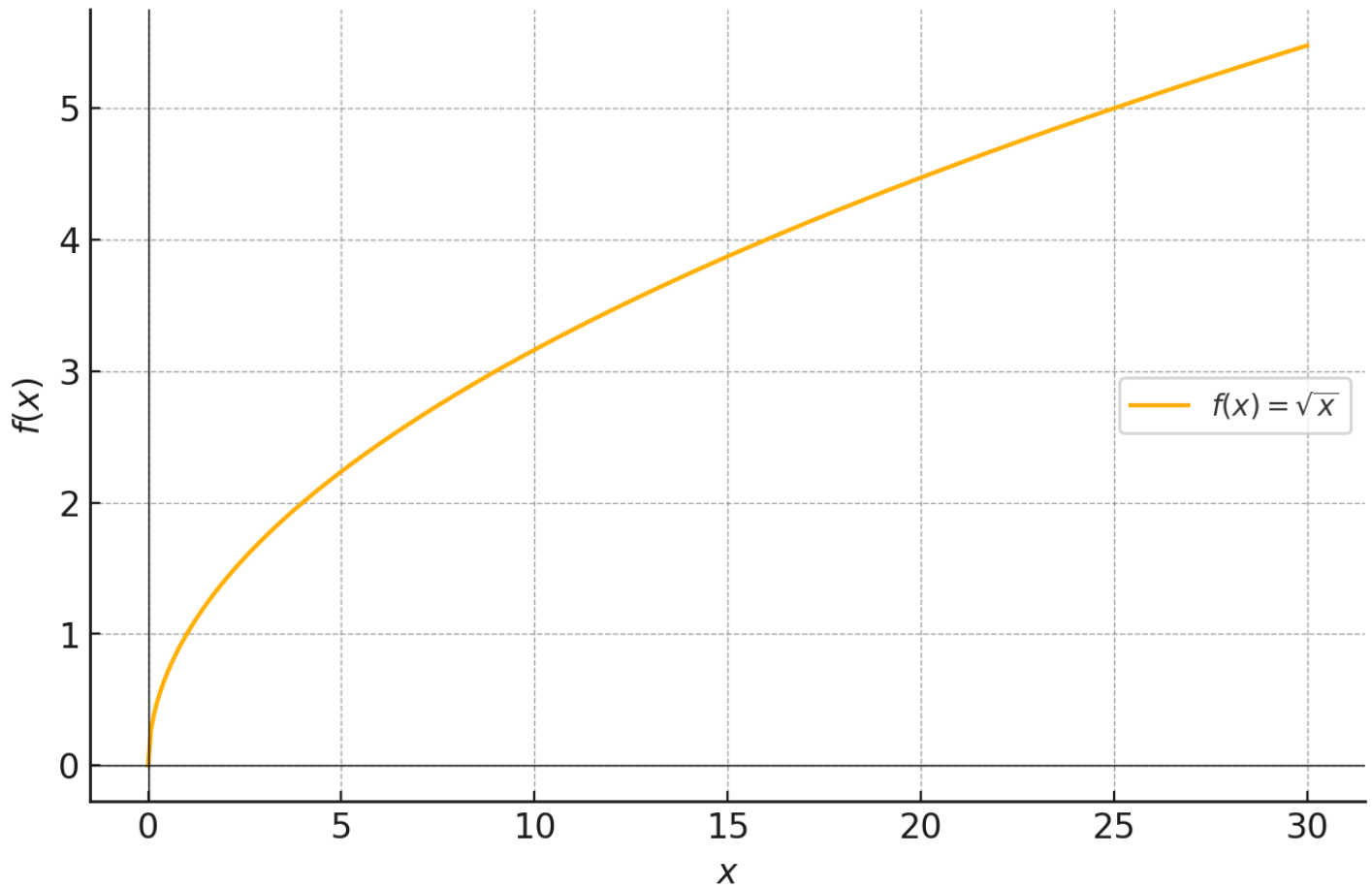
Màxims i mínims locals

- **Màxims locals:** La funció no té màxims locals, ja que no hi ha punts en què la funció es torni a reduir després de créixer.
- **Mínims locals:** La funció té un mínim local en $x = 0$ amb $f(0) = 0$, ja que és el punt més baix en el seu domini.

Gràfica esquemàtica

La gràfica de $f(x) = \sqrt{x}$ és una corba que comença a l'origen (0,0) i es dirigeix cap a la dreta, creixent de manera lenta. La corba s'acosta a l'eix x però mai no el toca, mentre creix indefinidament a mesura que x augmenta.

Gràfica de la funció $f(x) = \sqrt{x}$



Resum

- Domini: $[0, +\infty)$
- Comportament en els extrems: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ i $f(0) = 0$
- Intervals de creixement: Creixent en $[0, +\infty)$
- Màxims locals: Cap
- Mínims locals: $(0, 0)$

b) Traça, sobre la gràfica, la recta tangent a $f(x)$ al punt $x = 25$ i indica'n el pendent. (3 pt)

1. Pendent de la recta tangent

El pendent de la recta tangent en $x = 25$ és:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Substituint $x = 25$:

$$f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$$

La fracció $\frac{1}{10}$ és irreductible.

2. Equació de la recta tangent

Per trobar l'equació de la recta tangent en el punt $(25, 5)$, utilitzem la fórmula de la recta tangent:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

On $(x_0, f(x_0))$ és $(25, 5)$ i el pendent m és $\frac{1}{10}$. Substituïm:

$$y - 5 = \frac{1}{10}(x - 25)$$

Resolent per y :

$$y - 5 = \frac{1}{10}x - \frac{25}{10}$$

$$y - 5 = \frac{1}{10}x - \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{10}x - \frac{5}{2} + 5$$

Convertim 5 a fracció amb el mateix denominador:

$$5 = \frac{10}{2}$$

$$y = \frac{1}{10}x - \frac{5}{2} + \frac{10}{2}$$

$$y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$$

Resum

- Pendent de la recta tangent: $\frac{1}{10}$
- Equació de la recta tangent: $y = \frac{1}{10}x + \frac{5}{2}$

Gràfica de la funció $f(x) = \sqrt{x}$ amb la recta tangent en $x = 25$

