

P3. — Considerem els punts $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, -1, 3)$ i $C = (-1, 2, 1)$.

(a) [3 punts] Calcula el punt D tal que $ABDC$ sigui un paral·lelogram.

En un paral·lelogram, els vectors que connecten els costats oposats són iguals. Així, podem utilitzar la relació:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

1. Calcular el vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, 3) - (0, 0, 0) = (2, -1, 3)$$

2. Aplicar la relació per trobar D :

Sabem que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (2, -1, 3)$$

Aïllem D en termes de C :

$$D - C = (2, -1, 3)$$

$$D = C + (2, -1, 3)$$

3. Substituir les coordenades de C :

On $C = (-1, 2, 1)$:

$$D = (-1, 2, 1) + (2, -1, 3)$$

$$D = (-1 + 2, 2 - 1, 1 + 3)$$

$$D = (1, 1, 4)$$

- (b) [4 punts] Calcula un dels punts E de l'espai de tal manera que la recta AE sigui perpendicular al pla ABC i que la distància entre els punts A i E sigui 1.

1. Trobar el vector normal al pla ABC

Per trobar un vector normal al pla que passa pels punts A , B i C , utilitzarem els vectors directores que podem obtenir a partir dels punts A , B i C .

- Vectors directores del pla:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, 3) - (0, 0, 0) = (2, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 1)$$

- Vector normal al pla ABC :

El vector normal $\vec{n}$ es pot obtenir mitjançant el producte vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Calculant el determinant:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 2) - \mathbf{j}(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) + \mathbf{k}(2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1))$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-1 - 6) - \mathbf{j}(2 + 3) + \mathbf{k}(4 - 1)$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-7) - \mathbf{j}(5) + \mathbf{k}(3)$$

$$\vec{n} = (-7, -5, 3)$$

2. Trobar el punt E

El punt E ha de complir dues condicions:

1. La recta $\overrightarrow{AE}$ ha de ser perpendicular al pla ABC , així que $\overrightarrow{AE}$ ha de ser paral·lel a $\vec{n}$.
2. La distància AE ha de ser 1.

Suposem que E té coordenades (x, y, z) . Aleshores:

$$E = A + t\vec{n}$$

$$E = (0, 0, 0) + t(-7, -5, 3)$$

$$E = (-7t, -5t, 3t)$$

La distància AE s'ha de calcular com:

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-7t)^2 + (-5t)^2 + (3t)^2}$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{49t^2 + 25t^2 + 9t^2}$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{83t^2}$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{83} \cdot |t|$$

Perquè la distància sigui 1:

$$\sqrt{83} \cdot |t| = 1$$

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{83}}$$

Escollim $t = \frac{1}{\sqrt{83}}$ (potser es tria el signe +1 o -1):

$$E = \left(-7 \cdot \frac{1}{\sqrt{83}}, -5 \cdot \frac{1}{\sqrt{83}}, 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{83}} \right)$$

$$E = \left(-\frac{7}{\sqrt{83}}, -\frac{5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}} \right)$$

(c) [3 punts] Escriu l'equació d'un dels plans paral·lels al pla ABC que dista una unitat d'aquest.

1. Trobar l'equació del pla ABC

L'equació general d'un pla és:

$$ax + by + cz = d$$

on (a, b, c) és un vector normal al pla. Ja hem trobat el vector normal al pla ABC , que és $\vec{n} = (-7, -5, 3)$.

Per trobar l'equació del pla, utilitzarem aquest vector normal i un dels punts que pertanyen al pla. Utilitzarem el punt $A = (0, 0, 0)$, que està al pla.

L'equació del pla passant per A amb el vector normal $\vec{n}$ és:

$$-7x - 5y + 3z = d$$

Ja que el punt $A = (0, 0, 0)$ està en el pla, podem substituir-lo en l'equació per trobar d :

$$-7 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = d$$

$$d = 0$$

Per tant, l'equació del pla ABC és:

$$-7x - 5y + 3z = 0$$

2. Trobar l'equació dels plans paral·lels que disten una unitat

Els plans paral·lels al pla original tindran la mateixa normal $\vec{n}$, i la seva equació serà de la forma:

$$-7x - 5y + 3z = d$$

On d es determina de manera que la distància entre el pla original i el nou pla sigui 1. La fórmula per calcular la distància entre dos plans de la forma $Ax + By + Cz = d_1$ i $Ax + By + Cz = d_2$ és:

$$\text{distància} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

En aquest cas:

$$d_1 = 0 \text{ (per al pla original)}$$

$$d_2 = d \text{ (per al nou pla)}$$

$$A = -7, B = -5, C = 3$$

La distància entre els plans ha de ser 1, així que:

$$\frac{|d - 0|}{\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + 3^2}} = 1$$

Calculant la norma del vector normal:

$$\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 25 + 9} = \sqrt{83}$$

Substituint:

$$\frac{|d|}{\sqrt{83}} = 1$$

$$|d| = \sqrt{83}$$

Així, els dos possibles valors per d són $\sqrt{83}$ i $-\sqrt{83}$. Per tant, les equacions dels plans paral·lels que disten una unitat del pla original són:

$$-7x - 5y + 3z = \sqrt{83}$$

i

$$-7x - 5y + 3z = -\sqrt{83}$$