Problema 3 sèrie 2 juliol 2023 Catalunya (àlgebra MAT).

3. Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

El sistema en la forma normal és $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=2 \\ 3x+y-mz=3 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = (-2m^2-1+3)-(-3m-m+2) = -2m^2+4m = \mathbf{2m(2-m)}$$

$|A| = 0 \rightarrow m = 0$ i $m = 2$, són els valors a tenir en compte en la discussió.

Tenim tres casos a discutir:

Si $\boldsymbol{m \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{m \neq 2}$, com el $rang(A) = 3\ [|A| \neq 0]\ = rang(A^*)\ =$ nombre d'incògnites, tenim un **SCD** (Sistema Compatible Determinat). **Solució única.**

Si $\boldsymbol{m = 0}$, per Gauss obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots 2 \\ 3 & 1 & 0 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 2 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 3 & 1 & 0 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ 2f_1-f_2 \\ 3f_1-f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} \\ \\ f_3-f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & -1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{pmatrix}$$

$rang(A) = 2\ = rang(A^*) < 3 =$ nombre d'incògnites.

Per tant, es tracta d'un SCI (Sistema Compatible Indeterminat) amb $(3-2=1)$ un grau de llibertat. Infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

Si $\boldsymbol{m = 2}$, per Gauss obtenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots 2 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots 2 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 3 & 1 & -2 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ 2f_1-f_2 \\ 3f_1-f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ f_3/3 \\ 3f_3-5f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots\ 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots -6 \end{pmatrix}$$

$rang(A) = 2\ \neq rang(A^*) = 3 \Rightarrow$ SI (Sistema Incompatible). No hi ha solució.

b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas $m = 1$.
[1,25 punts]

Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$, quan substituïm en el sistema obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3 - 2f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \\ y + 3 \cdot \dfrac{3}{2} = 3 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -3/2 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}}$$

Observació: L'apartat a) es pot resoldre via el càlcul de rangs i l'apartat b) es pot resoldre també pel mètode de Cramer.