

3. El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) té previst muntar una exposició. S'estima que el nombre de visitants setmanals que rebrà l'exposició, expressat en desenes de persones, és donat per la funció $f(x) = \frac{240x}{x^2 - 2x + 4}$, en què $x \geq 1$ representa el temps, expressat en setmanes, que fa que l'exposició està oberta al públic.
- a) Quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana? Calculeu la taxa de variació mitjana del nombre de visitants entre la setmana 1 i la setmana 4.
- [1 punt]

Per saber quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana hem de calcular $f(1) = \frac{240 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = 80$. Per tant, la primera setmana es preveu que hi vagin $80 \cdot 10 = 800$ persones (recordeu que la funció és expressada en desenes de persones).

La taxa de variació mitjana entre les setmanes 1 i 4 és donada per:

$$TVM_f[1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{80 - 80}{3} = 0.$$

Aquesta taxa ens dona zero, perquè tant a la primera setmana com a la quarta s'espera el mateix nombre de visitants.

- b) Quina setmana es preveu que anirà més gent a veure l'exposició? Quants visitants s'estima que hi aniran aquella setmana?

[1,5 punts]

Busquem el màxim de la funció. Per fer-ho, calculem la derivada i la iguaem a zero:

$$f'(x) = \frac{240 \cdot (x^2 - 2x + 4) - 240x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{-240x^2 + 960}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Quan iguaem a zero la derivada veiem que s'anul·la en els punts $x = 2$ i $x = -2$. Descartem la solució negativa, perquè no té sentit en el context del problema, i observem que en $x = 2$ hi ha un màxim, ja que abans del punt $x = 2$ la derivada és positiva i després del punt $x = 2$ la derivada és negativa.

Per tant, el màxim de visitants setmanals s'assolirà durant la segona setmana.

Per saber el nombre de visitants durant la segona setmana, calculem la imatge de 2:

$$f(2) = \frac{240 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = 120$$

Per tant, durant la segona setmana el nombre de visitants previst és de $120 \cdot 10 = 1.200$ persones.