

3. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre a .

a) Calculeu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a .
[1,25 punts]

a) Per a estudiar el rang de la matriu A , calculem primer el determinant de la matriu per a veure quan té rang màxim:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24a^2 + 21a^2 - 105 - 12a^2 - 18a^2 = 15a^2 - 60$$

$$15a^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Així doncs, se'ns obren els casos següents:

CAS I. $\boxed{\text{Si } a \neq \pm 2, \text{rang } A = 3}$, atès que el determinant d'ordre 3 és no nul.

CAS II. $\boxed{\text{Si } a = 2, \text{rang } A = 2}$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

CAS III. $\boxed{\text{Si } a = -2, \text{rang } A = 2}$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

b) Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1,25 punts]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quan multipliquem les matrius, veiem que es tracta d'un sistema d'equacions lineal i homogeni. Per tant, sempre té com a mínim la solució $(0, 0, 0)$.

Tenim $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$ amb la matriu ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 \\ 7 & 8 & 9 & | & 0 \end{pmatrix}$.

Observem que la matriu de coeficients és la matriu A de l'apartat anterior per al valor $a = 2$. Per tant, el rang de la matriu de coeficients és 2.

De tota manera, notem que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$. Per tant, $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$.

El rang de la matriu del sistema i també el rang de la matriu ampliada són 2 (perquè la columna $(0, 0, 0)$ dels termes independents no pot augmentar el $\text{rang}(A)$), i el

nombre d'incògnites és 3. En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb $3 - 2 = 1$ grau de llibertat.

El menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar. Per tant:

$$\begin{cases} x + 2y &= -3z \\ 4x + 5y &= -6z \end{cases}$$

Per a trobar x i y en funció de z podem aplicar el mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -6z & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-15z + 12z}{-3} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 4 & -6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6z + 12z}{-3} = -2z$$

Per tant, les matrius solució demanades són les següents:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \quad z \text{ paràmetre.}$$