

3. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, a, 1)$, $B = (a, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$ i $D = (0, 0, 0)$, en què a és un paràmetre real.
- a) Determineu el valor del paràmetre a per al qual els punts són diferents i coplanaris (és a dir, que hi ha un pla que els conté).
- [1,25 punts]

Per a què els punts siguin coplanaris el determinant dels vectors $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ha de ser 0, per tant:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2a + a) - (1 + 2 + a^2) = 0, \text{ o sigui } a^2 - 3a + 2 = 0,$$

i, per tant, $a = 1$ o bé $a = 2$.

Pel valor $a = 1$, els punts A i C són el mateix, en canvi per $a = 2$ tots els punts són diferents.

- b) Per al valor $a = 2$, calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs A , B i C .
- [1,25 punts]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$, podeu fer servir

l'expressió $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, en què $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.

Utilitzem la fórmula de l'àrea del triangle a l'espai: $S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, 1) \times (0, -1, 0) = (1, 0, -1) \text{ i per tant l'àrea és } \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} u^2}.$$