

3. Calculeu la matriu X que verifica $A \cdot X \cdot B = C$, sabent que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

[2,5 punts]

Considerem la igualtat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Fent el primer producte de matrius tenim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Si ara realitzem el segon producte obtenim

$$\begin{pmatrix} a-b & 2a-3b \\ a-b-c & 2a-3b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre, per tant, el sistema

$$\begin{cases} a-b = -1 \\ 2a-3b = -2 \\ a-b-c = -3 \\ 2a-3b-3c = -8 \end{cases}$$

Si el resollem per el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obtenim per tant la solució $c = 2$, $b = 0$ i $a = -1$. Per tant, la matriu que buscàvem és

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$