

3. Una empresa de lloguer de vehicles disposa d'una flota de 250 vehicles. Si el preu del lloguer diari d'un vehicle és de 50 €, aconsegueix llogar-los tots. S'ha observat que la relació entre el preu del lloguer dels vehicles i el nombre de vehicles que es lloguen és lineal, de manera que per cada euro que s'incrementa el preu diari del lloguer es lloguen dos vehicles menys. Cada vehicle llogat genera un cost diari d'1 € de manteniment.
- a) Si anomenem x el nombre d'euros que s'incrementa el preu del lloguer, escriuiu la funció que determina els beneficis obtinguts en funció de x .
- [1 punt]

Considerem $I(x)$ la funció que determina els ingressos en funció de x i $D(x)$ la funció que determina les despeses també en funció de x . Aleshores la funció, $B(x)$, que determina els beneficis obtinguts serà:

$$B(x) = I(x) - D(x)$$

De l'enunciat deduïm que si el preu del lloguer de cada vehicle és de $50 + x$ el nombre de vehicles que es lloguen és $250 - 2x$. Per tant, els ingressos en funció de x seran

$$I(x) = (50 + x)(250 - 2x) = -2x^2 + 150x + 12500$$

I les despeses

$$D(x) = 250 - 2x$$

Finalment, la funció que ens dona els beneficis en funció de x serà

$$B(x) = -2x^2 + 150x + 12500 - (250 - 2x) = -2x^2 + 152x + 12250$$

b) A quin preu cal llogar els vehicles per a aconseguir el màxim de beneficis? Quin és aquest benefici màxim?

[1,5 punts]

Per trobar el valor òptim del preu de lloguer diari de cada vehicle, caldrà trobar el màxim de la funció $B(x)$. Per això comencem calculant la derivada i mirarem per quins punts s'anul·la:

$$B'(x) = -4x + 152; -4x + 152 = 0 \Rightarrow x = 38$$

Cal comprovar que efectivament el valor $x = 38$ correspon a un màxim.

Observem que $B'(x) > 0$ per valors inferiors a $x = 38$ i, per tant, $B(x)$ és creixent, mentre que $B'(x) < 0$ per valors més grans que $x = 38$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent. Així doncs, en $x = 38$, s'assoleix un màxim.

De manera que el preu òptim al que cal llogar cada vehicle diàriament si es vol aconseguir que l'empresa obtingui el benefici màxim serà de $50 + 38 = 88$ €.

El benefici màxim serà de $B(38) = -2(38)^2 + 152 \cdot 38 + 12250 = 15138$ €