

Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x quilos d'adob en un terreny, els seus ingressos seran $-x^2 + 60x + 100$ euros.

- a) Quina quantitat d'adob maximitza els seus ingressos? Quins són aquests ingressos màxims? (3 punts)

Per determinar quina quantitat d'adob x maximitza els ingressos i quins són aquests ingressos màxims, hem de maximitzar la funció d'ingressos $I(x)$ donada per:

$$I(x) = -x^2 + 60x + 100$$

Aquesta funció és una paràbola que s'obre cap avall (ja que el coeficient de x^2 és negatiu), així que el màxim es troba en el vèrtex de la paràbola.

La fórmula per trobar la coordenada x del vèrtex d'una paràbola de la forma $ax^2 + bx + c$ és:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

En la nostra funció $I(x)$, els coeficients són:

- $a = -1$
- $b = 60$
- $c = 100$ (encara que aquest últim no és necessari per trobar x)

Apliquem la fórmula:

$$x = -\frac{60}{2(-1)} = \frac{60}{2} = 30$$

Així doncs, la quantitat d'adob que maximitza els ingressos és $x = 30$ quilos.

Per determinar els ingressos màxims, substituïm $x = 30$ en la funció $I(x)$:

$$I(30) = -(30)^2 + 60(30) + 100$$

$$I(30) = -900 + 1800 + 100$$

$$I(30) = 1000$$

Per tant, els ingressos màxims són 1000 euros.

En resum:

- La quantitat d'adob que maximitza els ingressos és de 30 quilos.
- Els ingressos màxims són 1000 euros.

b) Si el cost de l'adob és de 12 euros per quilo, quina quantitat d'adob maximitza els beneficis? Quins són aquests beneficis màxims? (4 punts)

Per trobar la quantitat d'adob que maximitza els beneficis, primer hem de definir la funció de beneficis $B(x)$. Els beneficis es calculen com la diferència entre els ingressos i els costos.

La funció d'ingressos és:

$$I(x) = -x^2 + 60x + 100$$

El cost de l'adob és de 12 euros per quilo, així que la funció de costos $C(x)$ serà:

$$C(x) = 12x$$

La funció de beneficis $B(x)$ serà la diferència entre ingressos i costos:

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

$$B(x) = (-x^2 + 60x + 100) - 12x$$

$$B(x) = -x^2 + 60x - 12x + 100$$

$$B(x) = -x^2 + 48x + 100$$

Aquesta funció és una paràbola que s'obre cap avall, així que el màxim es troba en el vèrtex. Per trobar la coordenada x del vèrtex, utilitzem la fórmula:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

En la funció $B(x)$, els coeficients són:

- $a = -1$
- $b = 48$

Apliquem la fórmula:

$$x = -\frac{48}{2(-1)} = \frac{48}{2} = 24$$

Així doncs, la quantitat d'adob que maximitza els beneficis és $x = 24$ quilos.

Per determinar els beneficis màxims, substituïm $x = 24$ en la funció $B(x)$:

$$B(24) = -(24)^2 + 48(24) + 100$$

$$B(24) = -576 + 1152 + 100$$

$$B(24) = 676$$

Per tant, els beneficis màxims són 676 euros.

En resum:

- La quantitat d'adob que maximitza els beneficis és de 24 quilos.
- Els beneficis màxims són 676 euros.

c) Quines quantitats d'adob garanteixen beneficis positius?

(3 punts)

Per determinar quines quantitats d'adob garanteixen beneficis positius, hem de trobar els valors de x per als quals la funció de beneficis $B(x)$ és positiva, és a dir, quan $B(x) > 0$.

La funció de beneficis és:

$$B(x) = -x^2 + 48x + 100$$

Per trobar els valors de x per als quals $B(x) > 0$, primer trobem les arrels de l'equació $B(x) = 0$.

Aquestes arrels ens diran on la funció de beneficis creua l'eix x . Per fer això, resollem:

$$-x^2 + 48x + 100 = 0$$

Això és una equació quadràtica de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, on:

- $a = -1$
- $b = 48$
- $c = 100$

Utilitzem la fórmula general per trobar les arrels d'una equació quadràtica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituïm els valors:

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4(-1)(100)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2304 + 400}}{-2}$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2704}}{-2}$$

$$x = \frac{-48 \pm 52}{-2}$$

Això ens dona dues arrels:

$$x_1 = \frac{-48 + 52}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-48 - 52}{-2} = \frac{-100}{-2} = 50$$

Així, les arrels de l'equació són $x = -2$ i $x = 50$. Atès que $x = -2$ no té sentit en aquest context (no podem aplicar una quantitat negativa d'adob), considerem només $x = 50$.

Com que la paràbola s'obre cap avall (coeficient de x^2 negatiu), els beneficis són positius entre les arrels de l'equació. Així, els beneficis seran positius quan $0 < x < 50$.

En resum:

- Les quantitats d'adob que garanteixen beneficis positius estan entre 0 i 50 quilos, és a dir, $0 < x < 50$.