

Problema 4. Siga el pla $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Es demana:

- a) Calcular els valors de d perquè la distància del pla a l'origen siga una unitat. (2 punts)

Per trobar els valors de d perquè la distància del pla $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$ a l'origen sigui una unitat, seguim els següents passos:

1. Fórmula de la distància del pla a l'origen

La distància D del pla $Ax + By + Cz + D = 0$ a l'origen $(0, 0, 0)$ és:

$$D = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En aquest cas, el pla és:

$$6x + 4y - 3z - d = 0.$$

Aquí, $A = 6$, $B = 4$, $C = -3$, i $D = -d$.

2. Substituir els valors

El punt (x_0, y_0, z_0) és l'origen $(0, 0, 0)$. Substituïm això en la fórmula:

$$D = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}}.$$

Simplifiquem:

$$D = \frac{|-d|}{\sqrt{36 + 16 + 9}}.$$

3. Simplificar el denominador

Sumem els termes dins l'arrel quadrada:

$$36 + 16 + 9 = 61.$$

Per tant:

$$D = \frac{|d|}{\sqrt{61}}.$$

4. Igualar a 1 i resoldre per d

Volem que la distància sigui 1 unitat, així que igualem la fórmula a 1:

$$\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1.$$

Multipliquem amb $\sqrt{61}$ per resoldre per $|d|$:

$$|d| = \sqrt{61}.$$

5. Determinar els valors possibles de d

La solució $|d| = \sqrt{61}$ implica que d pot ser tant $\sqrt{61}$ com $-\sqrt{61}$.

Així que els valors de d que satisfan la condició són:

$$d = \sqrt{61} \text{ i } d = -\sqrt{61}.$$

Per tant, els valors de d són:

$$\boxed{\sqrt{61} \text{ i } -\sqrt{61}}.$$

- b) Calcular, en funció del paràmetre d , les coordenades dels punts A, B i C que resulten d'intersectar el pla π amb els eixos de coordenades, X, Y i Z , respectivament. (3 punts)

Per trobar les coordenades dels punts d'intersecció del pla $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$ amb els eixos de coordenades X, Y i Z , seguim aquests passos:

Intersecció amb l'eix X

L'intersecció del pla amb l'eix X es produeix quan $y = 0$ i $z = 0$. Substituïm aquests valors en l'equació del pla:

$$6x + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d = 0$$

$$6x - d = 0$$

Resolvem per x :

$$6x = d$$

$$x = \frac{d}{6}$$

Per tant, les coordenades del punt d'intersecció amb l'eix X són:

$$A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

Intersecció amb l'eix Y

L'intersecció del pla amb l'eix Y es produeix quan $x = 0$ i $z = 0$. Substituïm aquests valors en l'equació del pla:

$$6 \cdot 0 + 4y - 3 \cdot 0 - d = 0$$

$$4y - d = 0$$

Resolvem per y :

$$4y = d$$

$$y = \frac{d}{4}$$

Per tant, les coordenades del punt d'intersecció amb l'eix Y són:

$$B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

Intersecció amb l'eix Z

L'intersecció del pla amb l'eix Z es produeix quan $x = 0$ i $y = 0$. Substituïm aquests valors en l'equació del pla:

$$6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3z - d = 0$$

$$-3z - d = 0$$

Resolvem per z :

$$-3z = d$$

$$z = -\frac{d}{3}$$

Per tant, les coordenades del punt d'intersecció amb l'eix Z són:

$$C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

Resum

Les coordenades dels punts d'intersecció del pla amb els eixos de coordenades són:

- **Punt A** (intersecció amb l'eix X): $\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$
- **Punt B** (intersecció amb l'eix Y): $\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$
- **Punt C** (intersecció amb l'eix Z): $\left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$

- c) Per a $d \neq 0$, calcular l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ determinats pels punts de l'apartat anterior. (5 punts)

1. Determinació dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$

Les coordenades dels punts d'intersecció amb els eixos són:

- **Punt A :** $\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$
- **Punt B :** $\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$
- **Punt C :** $\left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$

Els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ són:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0 - \frac{d}{6}, \frac{d}{4} - 0, 0 - 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \left(0 - \frac{d}{6}, 0 - 0, -\frac{d}{3} - 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

2. Càlcul del producte escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{d}{6}\right) \left(-\frac{d}{6}\right) + \left(\frac{d}{4}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{d}{3}\right) = \frac{d^2}{36}$$

3. Càlcul de les magnituds $\|\overrightarrow{AB}\|$ i $\|\overrightarrow{AC}\|$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{\frac{4d^2 + 9d^2}{144}} = \frac{d\sqrt{13}}{12}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{d}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{4d^2}{36}} = \sqrt{\frac{5d^2}{36}} = \frac{d\sqrt{5}}{6}$$

4. Càlcul de l'angle θ

Utilitzem la fórmula del cosinus de l'angle entre dos vectors:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\left(\frac{d\sqrt{13}}{12}\right) \left(\frac{d\sqrt{5}}{6}\right)} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} = \frac{72}{36\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

Racionalitzem el resultat:

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{65}} \cdot \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}$$

5. Aproximació numèrica

Per trobar l'angle θ , utilitzem la funció arc cosinus:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2\sqrt{65}}{65} \right)$$

Aproximació numèrica:

1. **Calcular** $\frac{2\sqrt{65}}{65}$:

$$\sqrt{65} \approx 8.062$$

$$\frac{2 \times 8.062}{65} \approx \frac{16.124}{65} \approx 0.248$$

2. **Trobar** $\cos^{-1}(0.248)$:

$$\theta \approx \cos^{-1}(0.248)$$

Utilitzant una calculadora, obtenim:

$$\theta \approx 1.318 \text{ radians}$$

3. **Convertir a graus:**

$$\theta \approx 1.318 \text{ radians} \times \frac{180}{\pi} \approx 75.5^\circ$$

Resultat final

L'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ és:

En forma exacta:

$$\cos^{-1} \left(\frac{2\sqrt{65}}{65} \right)$$

En aproximació numèrica:

$$75.5^\circ \text{ (o 1.318 radians)}$$