

Problema 4. Atesa la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

sent a un nombre real, es demana que:

- a) Determineu el valor de a perquè aquesta funció siga contínua. (2 punts)

Per determinar el valor de a perquè la funció sigui contínua, hem d'assegurar-nos que els límits laterals de la funció en $x = -1$ siguin iguals i que coincideixin amb el valor de la funció en aquest punt.

La funció donada és:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1, \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Pas 1: Valor de la funció en $x = -1$

Quan $x = -1$, la funció es defineix per la primera expressió:

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$$

Pas 2: Límits laterals en $x = -1$

Límit lateral per l'esquerra (quan x s'acosta a -1 des de l'esquerra, $x \leq -1$):

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax^2 + 24x)$$

Substituïm $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$$

Límit lateral per la dreta (quan x s'acosta a -1 des de la dreta, $x > -1$):

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} ((x-1)^2 + 3)$$

Substituïm $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = ((-1-1)^2 + 3) = (2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

Pas 3: Igualar els límits per garantir la continuïtat

Perquè la funció sigui contínua en $x = -1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb el valor de la funció en aquest punt:

$$a - 25 = 7$$

Resolent per a :

$$a - 25 = 7 \implies a = 32$$

Resposta final

El valor de a perquè la funció sigui contínua és 32.

- b) Suposem que $a = 9$. Determineu els màxims i mínims locals que té aquesta funció en l'interval $] -9/2, -3/2[$. (4 punts)

1. Definir la funció amb $a = 9$

La funció donada és:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Amb $a = 9$, la funció en $x \leq -1$ és:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$$

I en $x > -1$, és:

$$f(x) = (x-1)^2 + 3$$

2. Trobar els punts crítics de la funció en l'interval $]-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}[$

Primer considerarem la funció $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$ en l'interval $x \leq -1$.

- Derivada primera:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 9x^2 + 24x) = 3x^2 + 18x + 24$$

- Trobar els punts crítics resolent $f'(x) = 0$:

$$3x^2 + 18x + 24 = 0$$

Simplifiquem la divisió per 3:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Aquesta és una equació quadràtica que podem factoritzar:

$$(x + 2)(x + 4) = 0$$

Les solucions són:

$$x = -2 \quad \text{i} \quad x = -4$$

- Avaluar els punts crítics i els extrems de l'interval:

Comprovem que aquests punts estan dins de l'interval $]-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}[$:

- $x = -2$ està dins de l'interval.
- $x = -4$ està dins de l'interval.

Avaluem $f(x)$ en aquests punts crítics:

$$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -8 + 36 - 48 = -20$$

$$f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -64 + 144 - 96 = -16$$

La funció en els extrems del interval $x = -\frac{9}{2}$ i $x = -\frac{3}{2}$ no cal avaluar perquè no són punts crítics però sí extrems (però no locals).

3. Segona derivada per determinar la naturalesa dels punts crítics:

- Segona derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 18x + 24) = 6x + 18$$

- Avaluar la segona derivada en els punts crítics:

$$f''(-2) = 6(-2) + 18 = -12 + 18 = 6 \quad (\text{positiu, per tant, } x = -2 \text{ és un mínim local})$$

$$f''(-4) = 6(-4) + 18 = -24 + 18 = -6 \quad (\text{negatiu, per tant, } x = -4 \text{ és un màxim local})$$

4. Conclusions:

- **Mínim local:** En $x = -2$, amb valor $f(-2) = -20$.
- **Màxim local:** En $x = -4$, amb valor $f(-4) = -16$.

Per tant, en l'interval $] -\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}[$:

- El punt $x = -4$ és un màxim local amb valor $f(-4) = -16$.
- El punt $x = -2$ és un mínim local amb valor $f(-2) = -20$.

- c) Suposem que $a = 0$. Calculeu l'àrea de la regió delimitada per aquesta funció, la recta d'equació $x = 2$, la recta d'equació $x = 3$ i l'eix el eje OX . (4 punts)

1. Definir la funció amb $a = 0$

Quan $a = 0$, la funció es redueix a:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x - 1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Per l'interval $[2, 3]$, només ens interessa la part de la funció $f(x) = (x - 1)^2 + 3$, ja que x és major que -1 .

2. Trobar la funció a l'interval $[2, 3]$

La funció per $x > -1$ és:

$$f(x) = (x - 1)^2 + 3$$

3. Calcular l'àrea

L'àrea entre la funció $f(x)$ i l'eix OX en l'interval $[2, 3]$ es calcula mitjançant la integral de la funció sobre aquest interval. La integral que calculem és:

$$A = \int_2^3 [(x - 1)^2 + 3] dx$$

Integrar la funció:

- Desenvolupem la funció $(x - 1)^2 + 3$:

$$(x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 1 + 3 = x^2 - 2x + 4$$

- Integrar $x^2 - 2x + 4$:

$$\int_2^3 (x^2 - 2x + 4) dx$$

- La integral de x^2 és $\frac{x^3}{3}$.
- La integral de $-2x$ és $-x^2$.
- La integral de 4 és $4x$.

Per tant:

$$\int (x^2 - 2x + 4) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x$$

- Avaluem la integral en els límits $x = 2$ i $x = 3$:

$$\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_2^3$$

Primer, avaluem en $x = 3$:

$$\frac{3^3}{3} - 3^2 + 4 \cdot 3 = \frac{27}{3} - 9 + 12 = 9 - 9 + 12 = 12$$

Ara, avaluem en $x = 2$:

$$\frac{2^3}{3} - 2^2 + 4 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 4 + 8 = \frac{8}{3} - 4 + 8 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{20}{3}$$

- La diferència és:

$$A = 12 - \frac{20}{3} = \frac{36}{3} - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$$

Per tant, l'àrea de la regió delimitada per la funció, les rectes $x = 2$ i $x = 3$, i l'eix OX és $\frac{16}{3}$ unitats quadrades.