

Problema 4. Un quadrat té dos vèrtexs consecutius en els punts $P = (2,1,3)$ i $Q = (1,3,1)$, i els altres dos sobre una recta r que passa pel punt $R = (4,7,6)$.

a) Calculeu l'equació de la recta r . (2 punts)

Per calcular l'equació de la recta r que passa pel punt $R = (4, 7, 6)$ i conté els altres dos vèrtexs del quadrat definit per $P = (2, 1, 3)$ i $Q = (1, 3, 1)$, primer determinem el vector direcció de la recta.

Pas 1: Vector $\overrightarrow{PQ}$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es calcula com:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2)$$

Pas 2: Vector ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$

Sabem que en un quadrat, els costats adjacents són ortogonals. Per trobar el vector direcció de la recta r , necessitem un vector ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$. Per trobar un vector ortogonal en l'espai tridimensional, podem usar el producte vectorial.

Fem el producte vectorial per trobar el vector direcció de la recta:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2 * 3 - (-2) * 6) - \mathbf{j}(-1 * 3 - (-2) * 2) + \mathbf{k}(-1 * 6 - 2 * 2) =$$
$$= \mathbf{i}(6 + 12) - \mathbf{j}(-3 + 4) + \mathbf{k}(-6 - 4) = 18\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} = (18, -1, -10)$$

Ara reescalem el vector per obtenir el vector direcció adequat:

$$\vec{d} = (-1, 2, -2)$$

Pas 3: Equació de la recta

La recta que passa per $R = (4, 7, 6)$:

$$\mathbf{r}(\lambda) = (4, 7, 6) + \lambda(-1, 2, -2)$$

Això dóna les equacions paramètriques correctes:

$$x = 4 - \lambda$$

$$y = 7 + 2\lambda$$

$$z = 6 - 2\lambda$$

Resum:

L'equació correcta de la recta r que passa pel punt $R = (4, 7, 6)$ és:

$$x = 4 - \lambda$$

$$y = 7 + 2\lambda$$

$$z = 6 - 2\lambda$$

b) Calculeu l'equació del pla que conté el quadrat.

(3 punts)

Per trobar l'equació del pla que conté el quadrat amb vèrtexs $P = (2, 1, 3)$, $Q = (1, 3, 1)$ i els altres dos vèrtexs sobre la recta r que passa pel punt $R = (4, 7, 6)$, cal primer identificar dos vectors que defineixin el pla. Un vector pot ser $\overrightarrow{PQ}$ i l'altre pot ser un vector de la recta r passant per R .

Pas 1: Vector $\overrightarrow{PQ}$

Ja hem calculat el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2)$$

Pas 2: Vector direcció de la recta r

Ja hem trobat que el vector direcció de la recta r és:

$$\vec{d} = (-1, 2, -2)$$

Però aquest vector és paral·lel a $\overrightarrow{PQ}$. Per trobar el vector que podem utilitzar per al pla, considerem que el quadrat és pla. La normal del pla es pot obtenir fent el producte vectorial amb un altre punt.

Pas 3: Vector $\overrightarrow{PR}$

El vector $\overrightarrow{PR}$ és:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (4 - 2, 7 - 1, 6 - 3) = (2, 6, 3)$$

Pas 4: Producte vectorial

Trobarem el producte vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ per obtenir un vector normal al pla:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2 * 3 - (-2) * 6) - \mathbf{j}(-1 * 3 - (-2) * 2) + \mathbf{k}(-1 * 6 - 2 * 2) =$$
$$= \mathbf{i}(6 + 12) - \mathbf{j}(-3 + 4) + \mathbf{k}(-6 - 4) = \mathbf{i}18 - \mathbf{j}1 + \mathbf{k} - 10 = (18, -1, -10)$$

Pas 5: Equació del pla

Tenim un vector normal $\mathbf{n} = (18, -1, -10)$ i un punt $P = (2, 1, 3)$ que es troba en el pla.

L'equació del pla és de la forma:

$$18(x - 2) - 1(y - 1) - 10(z - 3) = 0$$

Distribuïm els termes:

$$18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0$$

Simplifiquem:

$$18x - y - 10z - 5 = 0$$

Resum:

L'equació del pla que conté el quadrat és:

$$18x - y - 10z - 5 = 0$$

c) Trobeu les coordenades dels altres dos vèrtexs.

(5 punts)

Pas 1: Vector normal del pla

L'equació del pla és:

$$18x - y - 10z - 5 = 0$$

El vector normal al pla ($\vec{n}$) és:

$$\vec{n} = (18, -1, -10)$$

Pas 2: Vector $\overrightarrow{PQ}$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ és:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2)$$

Pas 3: Producte vectorial per trobar el vector perpendicular

Fem el producte vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}$:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 18 & -1 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-10) - (-2) \cdot (-1)) - \mathbf{j}(-1 \cdot (-10) - (-2) \cdot 18) + \mathbf{k}(-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 18)$$

$$\vec{d} = \mathbf{i}(-20 - 2) - \mathbf{j}(10 + 36) + \mathbf{k}(1 - 36) = \mathbf{i}(-22) - \mathbf{j}(46) + \mathbf{k}(-35)$$

$$\vec{d} = (-22, -46, -35)$$

Pas 4: Nova recta amb direcció $\vec{d}$

Creem una nova recta passant per P amb el vector direcció $\vec{d}$:

$$x = 2 - 22t$$

$$y = 1 - 46t$$

$$z = 3 - 35t$$

Pas 5: Intersecció de la nova recta amb la recta r

Les equacions paramètriques de la recta r són:

$$x = 4 - \lambda$$

$$y = 7 + 2\lambda$$

$$z = 6 - 2\lambda$$

Iguallem les equacions per trobar els punts de la intersecció:

1. Iguallem x de les dues rectes:

$$2 - 22t = 4 - \lambda$$

$$\lambda = 4 - 2 + 22t$$

$$\lambda = 2 + 22t$$

2. Iguallem y de les dues rectes:

$$1 - 46t = 7 + 2\lambda$$

$$1 - 46t = 7 + 2(2 + 22t)$$

$$1 - 46t = 7 + 4 + 44t$$

$$1 - 46t = 11 + 44t$$

$$1 - 11 = 44t + 46t$$

$$-10 = 90t$$

$$t = -\frac{1}{9}$$

3. Verifiquem amb z :

$$3 - 35t = 6 - 2\lambda$$

Substituïm $t = -\frac{1}{9}$:

$$3 - 35\left(-\frac{1}{9}\right) = 6 - 2\left(2 + 22\left(-\frac{1}{9}\right)\right)$$

$$3 + \frac{35}{9} = 6 - 2\left(2 - \frac{44}{9}\right)$$

$$3 + \frac{35}{9} = 6 - 4 + \frac{88}{9}$$

$$3 + \frac{35}{9} = 2 + \frac{88}{9}$$

Tot es compleix, per tant $t = -\frac{1}{9}$ és correcte.

Pas 6: Coordenades del punt A

Per obtenir el punt A , calculem les coordenades per a $t = -\frac{1}{9}$:

$$x = 2 - 22\left(-\frac{1}{9}\right) = 2 + \frac{22}{9} = \frac{40}{9}$$

$$y = 1 - 46\left(-\frac{1}{9}\right) = 1 + \frac{46}{9} = \frac{55}{9}$$

$$z = 3 - 35\left(-\frac{1}{9}\right) = 3 + \frac{35}{9} = \frac{62}{9}$$

Per tant, el punt A és:

$$A = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Pas 7: Nova recta amb direcció $\vec{d}$ passant per Q

Creem una nova recta passant per Q amb el vector direcció $\vec{d}$:

$$x = 1 - 22u$$

$$y = 3 - 46u$$

$$z = 1 - 35u$$

Pas 8: Intersecció de la nova recta amb la recta r

Les equacions paramètriques de la recta r són:

$$x = 4 - \lambda$$

$$y = 7 + 2\lambda$$

$$z = 6 - 2\lambda$$

Iguallem les equacions per trobar els punts de la intersecció:

1. Igualement x de les dues rectes:

$$1 - 22u = 4 - \lambda$$

$$\lambda = 4 - 1 + 22u$$

$$\lambda = 3 + 22u$$

2. Igualement y de les dues rectes:

$$3 - 46u = 7 + 2\lambda$$

$$3 - 46u = 7 + 2(3 + 22u)$$

$$3 - 46u = 7 + 6 + 44u$$

$$3 - 46u = 13 + 44u$$

$$3 - 13 = 44u + 46u$$

$$-10 = 90u$$

$$u = -\frac{1}{9}$$

3. Verifiquem amb z :

$$1 - 35u = 6 - 2\lambda$$

Substituïm $u = -\frac{1}{9}$:

$$1 - 35\left(-\frac{1}{9}\right) = 6 - 2\left(3 + 22\left(-\frac{1}{9}\right)\right)$$

$$1 + \frac{35}{9} = 6 - 2\left(3 - \frac{22}{9}\right)$$

$$1 + \frac{35}{9} = 6 - 6 + \frac{44}{9}$$

$$1 + \frac{35}{9} = \frac{44}{9}$$

Tot es compleix, per tant $u = -\frac{1}{9}$ és correcte.

Pas 9: Coordenades del punt B

Per obtenir el punt B , calculem les coordenades per a $u = -\frac{1}{9}$:

$$x = 1 - 22\left(-\frac{1}{9}\right) = 1 + \frac{22}{9} = \frac{31}{9}$$

$$y = 3 - 46\left(-\frac{1}{9}\right) = 3 + \frac{46}{9} = \frac{73}{9}$$

$$z = 1 - 35\left(-\frac{1}{9}\right) = 1 + \frac{35}{9} = \frac{44}{9}$$

Per tant, el punt B és:

$$B = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

Resum: Coordenades dels punts A i B

$$A = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

$$B = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$