

P4. — Considera la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$, per a $x \geq 0$.

a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini. (3 pt)

Per calcular el valor de la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$ als extrems del seu domini, seguirem els següents passos:

Funció donada

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

Domini de la funció

La funció $f(x)$ és definida per a tots els valors reals de x . En aquest cas, ens interessa el domini $x \geq 0$.

Valor de la funció en els extrems del domini

1. Quan $x = 0$

$$f(0) = e^0 - e^{-0}$$

Sabem que:

$$e^0 = 1 \quad \text{i} \quad e^{-0} = 1$$

Per tant:

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

2. Quan $x \rightarrow \infty$

Analitzem el comportament de $f(x)$ quan x tendeix a l'infinit:

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

A mesura que $x \rightarrow \infty$:

- e^x creix exponencialment i tendeix a l'infinit.
- e^{-x} decreix exponencialment i tendeix a 0.

Així:

$$e^{-x} \rightarrow 0 \text{ quan } x \rightarrow \infty$$

Per tant:

$$f(x) \rightarrow e^x - 0 = e^x \text{ quan } x \rightarrow \infty$$

Així:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Resum dels valors als extrems del domini

- Valor en $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

- Valor quan $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Resposta

$f(0) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
--

b) Calcula $f'(x)$ i $f''(x)$.

(4 pt)

Per calcular les derivades primera i segona de la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$, seguirem els passos següents:

Derivada Primera

Donem la funció:

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

Derivada primera $f'(x)$:

- La derivada de e^x és e^x .
- La derivada de e^{-x} és $-e^{-x}$ (perquè hem de multiplicar per la derivada de $-x$).

Per tant:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$f'(x) = e^x - (-e^{-x})$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

Derivada Segona

Derivada segona $f''(x)$:

Derivem $f'(x)$:

- La derivada de e^x és e^x .
- La derivada de e^{-x} és $-e^{-x}$.

Per tant:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$f''(x) = e^x + (-e^{-x})$$

$$f''(x) = e^x - e^{-x}$$

Resum

- Derivada primera:

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

- Derivada segona:

$$f''(x) = e^x - e^{-x}$$

Resposta

$f'(x) = e^x + e^{-x} \text{ i } f''(x) = e^x - e^{-x}$

c) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$.

(3 pt)

Per calcular la integral de la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$ en l'interval $[0, 1]$, hem de resoldre la següent integral:

$$\int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

Resolució

1. Integral e^x

La integral de e^x és e^x .

2. Integral $-e^{-x}$

La integral de $-e^{-x}$ és e^{-x} (ja que la integral de e^{-x} és $-e^{-x}$, i hem de multiplicar per -1).

Així, la integral de $f(x) = e^x - e^{-x}$ és:

$$\int (e^x - e^{-x}) dx = e^x + e^{-x} + C$$

On C és la constant d'integració.

Calcula la integral definida

$$\int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

Substituïm les límits d'integració:

$$(e^x + e^{-x}) \Big|_0^1$$

Avaluem a $x = 1$:

$$e^1 + e^{-1} = e + \frac{1}{e}$$

Avaluem a $x = 0$:

$$e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2$$

Restem els dos resultats:

$$\left(e + \frac{1}{e}\right) - 2$$

Resum

$$\int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = \left(e + \frac{1}{e}\right) - 2$$

Resposta

$$\boxed{\int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \frac{1}{e} - 2}$$