

P4. — Siguin les rectes

$$r : \begin{cases} x + 2y = -1, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : x + 1 = \frac{y - 1}{2} = z.$$

Calcula:

- (a) [5 punts] La posició relativa de les dues rectes. És a dir, si són coincidents, paral·leles, es tallen, o s'encreuen. En els darrers dos casos, especifica si ho fan perpendicularment.

Per determinar la posició relativa de les rectes r i s en l'espai tridimensional, hem de calcular diverses característiques de les rectes, com les seves direccions i posicions, i després veure com es relacionen.

Les rectes donades són:

1. Recta r :

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

2. Recta s :

$$\begin{cases} x + 1 = \lambda \\ y - 1 = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Pas 1: Reescriure les rectes en forma paramètrica

1. Recta r :

- Fixem $z = 1$, i substituïm en l'equació $x + 2y = -1$:

$$x = -1 - 2y$$

Per tant, la forma paramètrica de r amb $y = t$ com a paràmetre és:

$$\text{Recta } r : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

On t és el paràmetre.

2. Recta s :

La forma paramètrica ja és evident a partir de les equacions donades, amb λ com a paràmetre:

$$\text{Recta } s : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Pas 2: Trobar la direcció de cada recta

1. Direcció de la recta r :

La direcció de la recta r pot ser extreta dels coeficients de t :

$$\text{Vector direcció de } r = (-2, 1, 0)$$

2. Direcció de la recta s :

La direcció de la recta s és el vector associat a λ :

$$\text{Vector direcció de } s = (1, 2, 1)$$

Pas 3: Verificar si les rectes són paral·leles

Les rectes són paral·leles si els seus vectors direcció són múltiples un de l'altre. Compararem els vectors direcció de les dues rectes:

$$(-2, 1, 0) \quad \text{i} \quad (1, 2, 1)$$

Podem veure que no hi ha un factor comú que multipliqui un vector per obtenir l'altre, així que les rectes no són paral·leles.

Pas 4: Comprovar si les rectes es tallen

Les rectes es tallen si existeix un conjunt de valors per t i λ tal que les coordenades (x, y, z) coincideixin en ambdues rectes. Igualem les coordenades de les dues rectes:

$$\begin{cases} -1 - 2t = -1 + \lambda \\ t = 1 + 2\lambda \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

Resolguem aquestes equacions:

1. De l'equació $1 = \lambda$:

$$\lambda = 1$$

2. Substituïm $\lambda = 1$ a les altres dues equacions:

- Per l'equació $-1 - 2t = -1 + \lambda$:

$$-1 - 2t = -1 + 1 \implies -2t = 0 \implies t = 0$$

- Per l'equació $t = 1 + 2\lambda$:

$$0 = 1 + 2 \cdot 1 \implies 0 = 3 \text{ (inconsistent)}$$

Així, les rectes no es tallen, ja que no hi ha una solució consistent per t i λ .

Pas 5: Verificar si les rectes són perpendiculars

Les rectes es tallen perpendicularment si el producte escalar dels vectors direcció és zero.

$$\text{Producte escalar} = (-2, 1, 0) \cdot (1, 2, 1) = (-2 \cdot 1) + (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) = -2 + 2 + 0 = 0$$

El producte escalar és zero, així que les rectes són perpendiculars.

Conclusió

Les rectes:

- No són coincidents.
- No són paral·leles.
- No es tallen en un punt comú.

Això significa que les rectes **s'encreuen**. En aquest context, si les rectes són perpendiculars però no es tallen, això vol dir que les rectes no es toquen i no hi ha cap punt comú on es tallen.

(b) [5 punts] L'equació del pla que és paral·lel a les dues rectes r i s , i passa pel punt $A = (2, 2, 1)$.

Per trobar l'equació del pla que és paral·lel a dues rectes r i s i passa per un punt donat, necessitem seguir aquests passos:

1. Trobar els vectors directores de les rectes r i s .
2. Obtenir un vector normal al pla utilitzant el producte vectorial dels vectors directores.
3. Utilitzar el punt donat i el vector normal per trobar l'equació del pla.

1. Trobar els vectors directores de les rectes:

- Recta r :

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

El vector director de r és $\vec{d}_r = (-2, 1, 0)$.

- Recta s :

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El vector director de s és $\vec{d}_s = (1, 2, 1)$.

2. Trobar el vector normal al pla:

El vector normal al pla és el producte vectorial de $\vec{d}_r$ i $\vec{d}_s$. Calcularem el producte vectorial $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s$:

$$\vec{d}_r = (-2, 1, 0)$$

$$\vec{d}_s = (1, 2, 1)$$

El producte vectorial és:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculem el determinant:

$$\vec{n} = \hat{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) - \hat{j}(-2 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + \hat{k}(-2 \cdot 2 - 1 \cdot 1)$$

$$\vec{n} = \hat{i}(1) - \hat{j}(-2) + \hat{k}(-4 - 1)$$

$$\vec{n} = \hat{i}(1) + \hat{j}(2) - \hat{k}(5)$$

$$\vec{n} = (1, 2, -5)$$

3. Equació del pla:

Utilitzem el vector normal $\vec{n} = (1, 2, -5)$ i el punt $A = (2, 2, 1)$ per trobar l'equació del pla.

L'equació general del pla és:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

On (a, b, c) són les components del vector normal i (x_0, y_0, z_0) és el punt donat. Substituïm $(a, b, c) = (1, 2, -5)$ i $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 1)$:

$$1(x - 2) + 2(y - 2) - 5(z - 1) = 0$$

Simplifiquem:

$$x - 2 + 2y - 4 - 5z + 5 = 0$$

$$x + 2y - 5z - 1 = 0$$

Resposta

L'equació del pla que és paral·lel a les rectes r i s i passa pel punt $A = (2, 2, 1)$ és:

$$x + 2y - 5z - 1 = 0$$