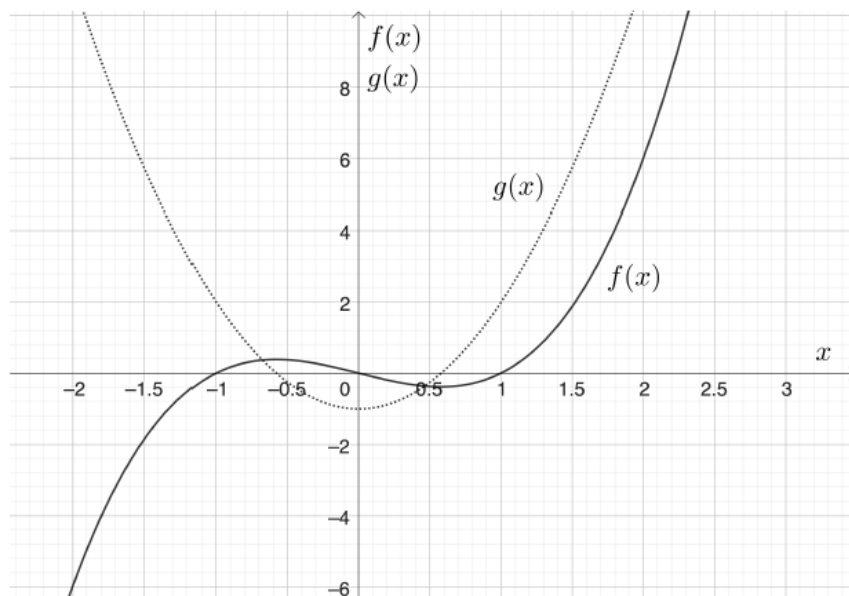


P4. — Considera dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, que estan representades a la gràfica següent:



- a) Sabem que una de les funcions és $x(x-1)(x+1)$ i que l'altra és $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, però no sabem quina és quina. Dedueix, partint de la gràfica, quina és $f(x)$ i quina és $g(x)$. Justifica la resposta. (3 pt)

Passos per identificar les funcions:

1. Identificació de les arrels:

- Per a $f(x) = x(x-1)(x+1)$:
 - Les arrels són $x = 0$, $x = -1$, i $x = 1$.
- Per a $g(x) = (x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$:
 - Les arrels són $x = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$ i $x = -1/\sqrt{3} \approx -0,577$.

2. Observació de la gràfica:

- La funció que talla l'eix x als punts $x = 0$, $x = -1$, i $x = 1$ és $f(x)$.
- La funció que talla l'eix x als punts $x = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$ i $x = -1/\sqrt{3} \approx -0,577$ és $g(x)$.

Justificació:

- Observant la gràfica, podem veure que:
 - La funció amb tres punts de tall amb l'eix x als punts $-1, 0$, i 1 és la que està etiquetada com $f(x)$.
 - La funció amb dos punts de tall amb l'eix x als punts aproximadament $-0,577$ i $0,577$ és la que està etiquetada com $g(x)$.

Conclusió:

- La funció $f(x)$ és la funció $x(x-1)(x+1)$.
- La funció $g(x)$ és la funció $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$.

Això ho podem concloure observant els punts on les funcions tallen l'eix x i comparant-los amb les arrels de les funcions donades.

- b) Sabem que una d'elles és la derivada de l'altra. Digueu quina és quina: és $f(x) = g'(x)$? o bé és $g(x) = f'(x)$? (3 pt)

Per determinar quina funció és la derivada de l'altra, cal calcular les derivades de les funcions donades i comparar-les amb les gràfiques proporcionades.

Les funcions que tenim són:

1. $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$
2. $g(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) = x^2 - \frac{1}{3}$

Derivades de les funcions:

- Derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - x) = 3x^2 - 1$$

- Derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = 2x$$

Comparació amb les gràfiques:

- La gràfica de $f(x)$ (la funció cúbica) té un comportament que sembla derivar d'una funció quadràtica, ja que té tres punts d'intersecció amb l'eix x .
- La gràfica de $g(x)$ (la funció quadràtica) té un comportament que sembla derivar d'una funció cúbica, ja que té dos punts d'intersecció amb l'eix x .

Comprovació de les derivades amb les gràfiques:

- La derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$ és una funció quadràtica que té arrels en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Això coincideix amb les arrels de $g(x)$.
- La derivada $g'(x) = 2x$ és una funció lineal, però la funció $f(x)$ és una funció cúbica, no una funció quadràtica. Això no coincideix amb les gràfiques.

Per tant, basant-nos en el comportament de les gràfiques i les derivades calculades, podem concloure que:

$$g(x) = f'(x)$$

En altres paraules, la funció quadràtica $g(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ és la derivada de la funció cúbica $f(x) = x^3 - x$.

- c) Calcula l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, que es troba compresa entre els punts en què $g(x) = 0$. (4 pt)

Per calcular l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, compresa entre els punts en què $g(x) = 0$, primer identifiquem aquests punts d'intersecció i després integrem la funció entre aquests límits.

La funció $g(x)$ és:

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Trobar els punts d'intersecció:

Els punts on $g(x) = 0$ són les arrels de l'equació $x^2 - \frac{1}{3} = 0$:

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,577$$

Aquests són els límits d'integració.

Integració per calcular l'àrea:

L'àrea sota la corba $g(x)$ entre $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ es calcula integrant $g(x)$ respecte a x :

$$\text{Àrea} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$$

Dividim aquesta integral en dues parts:

$$\text{Àrea} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^2 dx - \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{3} dx$$

Calculem cada part per separat.

1. Integral de x^2 :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. Integral de la constant $\frac{1}{3}$:

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} (x) \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Ara restem les dues integrals per obtenir l'àrea total:

$$\text{Àrea} = \frac{2}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}} - \frac{6}{9\sqrt{3}} = -\frac{4}{9\sqrt{3}}$$

Simplifiquem la fracció:

$$\text{Àrea} = -\frac{4}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

Però com que l'àrea no pot ser negativa, prenem el valor absolut:

$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$$

Així, l'àrea compresa entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses entre els punts $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ és $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.