

P4. — (a) [5 punts] Discuteix, segons els valors de a i b (paràmetres reals), la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b.$$

És a dir, si són coincidents, paral·lels o es tallen. En el darrer cas, especifica si ho fan perpendicularment.

1. Determinar si els plans són paral·lels

Dos plans són paral·lels si i només si els vectors normals dels plans són colineals. Els vectors normals als plans són:

$$\vec{n}_1 = (3, a, -1)$$

$$\vec{n}_2 = (6, 1, -2)$$

Perquè els plans siguin paral·lels, $\vec{n}_1$ ha de ser múltiple escalat de $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$$

Això implica:

$$(3, a, -1) = k \cdot (6, 1, -2)$$

Així, podem escriure les següents equacions:

1. $3 = 6k$
2. $a = k$
3. $-1 = -2k$

Resolent les equacions:

- De $3 = 6k$, obtenim $k = \frac{1}{2}$.
- De $-1 = -2k$, obtenim $k = \frac{1}{2}$.

Amb $k = \frac{1}{2}$, podem substituir a l'equació $a = k$:

$$a = \frac{1}{2}$$

Per tant, els plans són paral·lels si i només si $a = \frac{1}{2}$.

2. Determinar si els plans són coincidents

Els plans són coincidents si i només si els vectors normals són colineals i les constants en les equacions són proporcionals. Ja hem determinat que els plans són paral·lels si $a = \frac{1}{2}$. Si $a = \frac{1}{2}$, hem de comprovar si les constants també són proporcionals:

Les equacions dels plans seran coincidents si:

$$\frac{1}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Això implica:

$$b = 2$$

Per tant, els plans són coincidents si i només si $a = \frac{1}{2}$ i $b = 2$.

3. Determinar si els plans es tallen

Si els plans no són paral·lels, es tallen en una línia. En aquest cas, el vector normal del pla π_1 no és múltiple escalar del vector normal del pla π_2 , és a dir, $a \neq \frac{1}{2}$.

4. Determinar si la intersecció és perpendicular

Si els plans no són paral·lels, es tallen en una línia. Per saber si la línia d'intersecció és perpendicular a un dels plans, hem de comprovar si el vector normal d'un dels plans és perpendicular al vector de la recta d'intersecció. La recta d'intersecció és perpendicular als dos vectors normals del pla.

Calculem el producte escalar entre els vectors normals:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (3, a, -1) \cdot (6, 1, -2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \cdot 6 + a \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 18 + a + 2$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 20 + a$$

- Els plans es tallen perpendicularment si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$:

$$20 + a = 0$$

$$a = -20$$

Així, els plans es tallen perpendicularment si $a = -20$. En aquest cas, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, el que confirma que els plans es tallen perpendicularment.

Resum

1. Plans paral·lels:

- Els plans són paral·lels si i només si $a = \frac{1}{2}$. En aquest cas, els vectors normals són colineals.

2. Plans coincidents:

- Els plans són coincidents si i només si $a = \frac{1}{2}$ i $b = 2$. En aquest cas, els vectors normals són colineals i les constants en les equacions són proporcionals.

3. Plans que es tallen:

- Si $a \neq \frac{1}{2}$, els plans no són paral·lels i es tallen en una línia.

4. Plans que es tallen perpendicularment:

- Els plans es tallen perpendicularment si $a = -20$. En aquest cas, el producte escalar dels vectors normals és zero, la qual cosa indica que els vectors normals són perpendiculars.

(b) [5 punts] Calcula l'equació de la recta perpendicular al pla π i que passa pel punt de tall entre la recta s i el mateix pla π , sent

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta, \\ y = 3\beta, \\ z = 1 + \alpha, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

per a α i β valors reals qualssevol.

1. Trobar el punt de tall entre la recta s i el pla π

Substituïm les coordenades de la recta s a les equacions del pla π :

- $x = 1 + 2t$
- $y = 2t$
- $z = 1 - t$

Substituïm en les equacions del pla π :

$$1 + 2t = 2 + 4\alpha - \beta$$

$$2t = 3\beta$$

$$1 - t = 1 + \alpha$$

Resolent aquestes equacions:

1. De l'equació $1 - t = 1 + \alpha$:

$$\alpha = -t$$

2. De l'equació $2t = 3\beta$:

$$\beta = \frac{2t}{3}$$

3. Substituïm $\alpha = -t$ i $\beta = \frac{2t}{3}$ a l'equació $1 + 2t = 2 + 4\alpha - \beta$:

$$1 + 2t = 2 + 4(-t) - \frac{2t}{3}$$

$$1 + 2t = 2 - 4t - \frac{2t}{3}$$

Multipliquem per 3 per eliminar el denominador:

$$3(1 + 2t) = 3(2 - 4t - \frac{2t}{3})$$

$$3 + 6t = 6 - 12t - 2t$$

$$3 + 6t = 6 - 14t$$

$$20t = 3$$

$$t = \frac{3}{20}$$

Substituïm $t = \frac{3}{20}$ en α i β :

$$\alpha = -\frac{3}{20}$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \frac{3}{20}}{3} = \frac{1}{10}$$

Trobar les coordenades del punt de tall substituint $t = \frac{3}{20}$ a l'equació de la recta s :

$$x = 1 + 2 \cdot \frac{3}{20} = 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$$

$$y = 2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{10}$$

$$z = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

El punt de tall és:

$$P\left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20}\right)$$

2. Trobar el vector normal al pla π

Els vectors directores de la recta π són:

$$\vec{d}_1 = (4, 0, 1)$$

$$\vec{d}_2 = (-1, 3, 0)$$

El producte vectorial és:

$$\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(0 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - \mathbf{j}(4 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) + \mathbf{k}(4 \cdot 3 - 0 \cdot (-1))$$

$$\vec{n} = \mathbf{i}(-3) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(12)$$

$$\vec{n} = (-3, -1, 12)$$

3. Equació de la recta perpendicular al pla π

L'equació de la recta perpendicular al pla π passant pel punt $P \left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20} \right)$ és:

$$\begin{cases} x = \frac{13}{10} - 3t \\ y = \frac{3}{10} - t \\ z = \frac{17}{20} + 12t \end{cases}$$

On t és el paràmetre.