

4. La funció $C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$, en què t són els anys transcorreguts i $C(t)$ la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.
- a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants en tenia al cap d'un any.
[0,5 punts]

En el moment inicial tenia $C(0) = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$ milers de clients. Al cap d'un any tindrà $C(1) = 3 - \frac{1}{1-4+5} = \frac{5}{2} = 2,5$ milers de clients.

- b) Trobeu l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant.
[1 punt]

Observem que la funció $C(t)$ està definida per tot valor real t (ja que el denominador $t^2 - 4t + 5$ no s'anul·la mai) i que, per la naturalesa del problema, té sentit per a tot $t \geq 0$. Calculem la derivada :

$C'(t) = \frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $\frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2} = 0$, obtenim que $t = 2$, que correspon a l'instant en el qual hi ha una quantitat de clients de $C(2) = 3 - \frac{1}{4-8+5} = 2$ milers.

És fàcil veure què aquest valor correspon a un mínim observant que la derivada canvia de signe en $t = 2$, passant de negativa a positiva. Per tant, després de 2 anys l'empresa tindrà 2.000 clients i començarà a remuntar.

- c) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconseguixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi.
[1 punt]

Hem de resoldre l'equació

$$3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = \frac{14}{5}$$

Tenim que

$\frac{1}{5} = \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$, per tant, $t^2 - 4t + 5 = 5$, i simplificant obtenim $t^2 - 4t = 0$, d'on obtenim les solucions $t = 0$ que correspon a l'instant en què s'inicia l'estudi i $t = 4$ que representa el moment en què tornen a tenir els 2.800 clients de l'inici de l'estudi. Per tant, hauran de passar 4 anys per tenir de nou el mateix nombre de clients.