

4. Diem que una matriu és màgica si la suma dels elements de cada fila i de cada columna té com a resultat en tots els casos el mateix valor, que s'anomena *constant màgica*.

El Martí ha trobat una manera de crear matrius màgiques triant tres nombres qualssevol i multiplicant-los per les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El Martí proposa als seus amics que cadascú construeixi la seva matriu màgica particular a partir del dia del seu aniversari, del mes del seu aniversari i de la seva edat.

- a) Sabent que el Martí va néixer el 10 de març i que té 18 anys, calculeu $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$.
Comproveu que la matriu resultant és màgica i indiqueu quina és la seva constant màgica (el valor comú de la suma de les files i les columnes).

[1,25 punts]

Comencem calculant el producte que ens demanen

$$10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$$

$$\begin{aligned} &= 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comprovem que efectivament la matriu és màgica:

$$10 + 41 + 3 = 54, 11 + 18 + 25 = 54, 33 - 5 + 26 = 54, 10 + 11 + 33 = 54, 41 + 18 - 5 = 54 \text{ i } 3 + 25 + 26 = 54.$$

La constant màgica del Martí és 54.

- b) El Martí ha calculat la matriu màgica del seu pare, que fa l'aniversari el 8 de setembre, i ha obtingut que la seva constant màgica és 153. Quina edat té el pare del Martí?
[1,25 punts]

Ara sabem que el pare del Martí va néixer el 8 de setembre però no sabem quina edat té, que anomenarem x . Si calculem la seva matriu màgica obtenim

$$\begin{aligned} 8 \cdot A + 9 \cdot B + x \cdot C &= 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -17 + 3x & 9 \\ 1 + x & x & -1 + x \\ -9 + 2x & 17 - x & -8 + 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabem que la suma de qualsevol fila o columna ha de sumar 153. A partir, per exemple, de la primera fila, obtenim que $8 - 17 + 3x + 9 = 153$ i, per tant, obtenim que $x = 51$.

Així doncs, el pare del Martí té 51 anys.