

4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

a) Justifiqueu que $f(x) = 2$ té una solució en l'interval $(-1, 0)$.

[1,25 punts]

Que l'equació $f(x) = 2$ tingui alguna solució és equivalent que la funció $g(x) = f(x) - 2$ tingui algun zero.

La funció $g(x)$ és una funció contínua a l'interval $[-1, 0]$, ja que és suma de dues funcions contínues (una funció polinòmica -exactament una funció lineal- i una funció exponencial).

D'altra banda podem comprovar que

$$g(-1) \cdot g(0) = (3 + e^{-3} - 2)(0 + e^{-1} - 2) = (1 + e^{-3})(e^{-1} - 2) < 0,$$

per tant podem aplicar el teorema de Bolzano i afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-1, 0)$.

b) Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.

[1,25 punts]

Calculem els punts de tall entre les dues funcions:

$$f(x) = h(x)$$

$$-3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1}$$

$$-3x = -3x^2$$

$$-3x + 3x^2 = 3x(x - 1) = 0$$

Hi ha, per tant, dues solucions: $x = 0$ i $x = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 (h(x) - f(x)) \, dx \right| = \left| \int_0^1 ((-3x^2 + e^{2x^3-1}) - (-3x + e^{2x^3-1})) \, dx \right| = \\ &= \left| \int_0^1 (-3x^2 + 3x) \, dx \right| = \left| \left[-x^3 + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Observació: També es pot comprovar que la funció $h(x)$ està per sobre de la funció $f(x)$ a l'interval $(0, 1)$ i calcular directament l'àrea amb $A = \int_0^1 (h(x) - f(x)) \, dx$.