

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què $\ln$ és el logaritme neperià.
- a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

La recta tangent és horitzontal en els punts on la derivada s'anul·la, aleshores:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Així, l'únic punt amb recta tangent horitzontal és $(x, y) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$

Per determinar si és un extrem relatiu podem fer servir el criteri de la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2 \ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \rightarrow \text{indica que correspon a un màxim relatiu.}$$

- b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

En relació amb les asímptotes, com que la funció només està definida per $x > 0$, cal mirar l'asímtota només per a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ ind.}$$

Aplicant la regla de l'Hôpital, resoldrem aquesta indeterminació:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per tant, l'eix d'abscisses, $y = 0$, és una asímptota horitzontal d'aquesta funció.

- c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.

[1 punt]

L'àrea demanada correspon a la integral definida:

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

La representació gràfica és:

