

4. Un grup de biòlegs està estudiant un cultiu de bacteris. La població d'aquests bacteris (en centenars) és donada per la funció $P(t) = a + \frac{12t}{t^2 + b}$, en què a i b són constants positives reals i $t \geq 0$ és el temps transcorregut en minuts.

Sabem que a l'instant inicial de l'estudi la població de bacteris era de 6 centenars i que el valor màxim de població s'ha assolit al cap de 2 minuts d'haver iniciat l'estudi.

- a) Trobeu els valors de les constants a i b .

[1,25 punts]

A l'instant inicial la població és de 6 centenars, per tant, $P(0) = 6$:

$$a + \frac{12 \cdot 0}{0^2 + b} = 6$$

Per tant, obtenim que $a = 6$.

D'altra banda, sabem que el màxim de la població s'assoleix a l'instant $t = 2$, per tant, $P'(2) = 0$. Calculem la derivada:

$$P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + b) - 12t \cdot 2t}{(t^2 + b)^2} = \frac{-12t^2 + 12b}{(t^2 + b)^2}$$

Imposem que $P'(2) = 0$:

$$\frac{-12 \cdot 2^2 + 12b}{(2^2 + b)^2} = 0$$

D'aquí obtenim que $-48 + 12b = 0$ i, per tant, $b = 4$.

Així, per tal que es compleixin les condicions del problema cal que $a = 6$ i $b = 4$.

D'altra banda, observem que amb aquests valors dels paràmetres efectivament en $t = 2$ hi ha un màxim perquè la derivada és positiva en l'interval $[0,2)$ i negativa per a $t > 2$.

- b)** Calculeu la població màxima de bacteris i estudeu-ne el comportament a llarg termini, és a dir, cap a quin valor s'estabilitza el nombre de bacteris.

[1,25 punts]

La població obté el seu màxim a l'instant $t = 2$:

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$$

Per tant, la població màxima és de 9 centenars de bacteris.

Calculem ara el límit per obtenir la població a llarg termini:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + 0 = 6$$