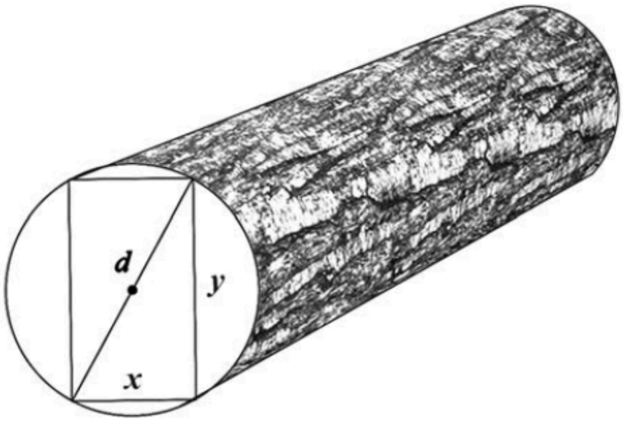
Problema 4 sèrie 5 juny 2021 Catalunya (anàlisi MAT).

4. La resistència al trencament R d'una biga de secció rectangular de base x i altura y és directament proporcional al producte xy^2; per tant, $R = kxy^2$, en què k és una constant positiva. Disposem d'un tronc de fusta en forma de cilindre de diàmetre d com el de la figura.



a) Comproveu que la resistència R de la biga rectangular de base x que podem construir amb aquest tronc ve donada per l'expressió $R = kx(d^2 - x^2)$.
[1,25 punts]

aplicant el teorema de Pitàgores $x^2 + y^2 = d^2$, i per tant $y^2 = d^2 - x^2$.

En substituir a la resistència R obtenim $\boxed{R = kxy^2 = kx(d^2 - x^2)}$

b) Calculeu les dimensions de la biga rectangular de resistència màxima que podem construir a partir d'aquest tronc i calculeu aquesta resistència màxima.
[1,25 punts]

Per trobar la resistència màxima derivem i igualem a 0:

$$R' = k\left((d^2 - x^2) + x(-2x)\right) = k(d^2 - 3x^2) = 0,$$

Per tant $\boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}}$, i $\boxed{y = \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}}$, es tracta d'un màxim atès que $R'' = -6kx$

$$\mathrm{R}''\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right) = -6k\frac{d\sqrt{3}}{3} < 0.$$

Per trobar la resistència d'aquesta biga cal substituir els valors de x, y:

$$\boxed{R_{max} = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(\frac{d\sqrt{6}}{3}\right)^2 = kd^3\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$