

Problema 5. Es considera la funció $h(x) = ax + x^2$, en què a és un paràmetre real. Es demana:

- a) El valor de a que fa que la gràfica de la funció $y = h(x)$ tinga un mínim relatiu en l'abscissa

$$x = -\frac{3}{4}.$$

(3 punts)

Per trobar el valor de a que fa que la gràfica de la funció $y = h(x) = ax + x^2$ tingui un mínim relatiu a $x = -\frac{3}{4}$, seguirem aquests passos:

1. Trobar la derivada primera de $h(x)$.
2. Establir que la derivada primera és zero en $x = -\frac{3}{4}$.
3. Trobar el valor de a utilitzant aquesta informació.

1. Derivada primera de $h(x)$

La funció és:

$$h(x) = ax + x^2$$

La derivada primera és:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(ax + x^2) = a + 2x$$

2. Derivada primera igual a zero en $x = -\frac{3}{4}$

Volem que la derivada primera sigui zero en $x = -\frac{3}{4}$:

$$h'\left(-\frac{3}{4}\right) = a + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$$

Resolvem l'equació:

$$a + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$$

$$a - \frac{3}{2} = 0$$

$$a = \frac{3}{2}$$

3. Valor de a

El valor de a que fa que la funció tingui un mínim relatiu en $x = -\frac{3}{4}$ és:

$$a = \frac{3}{2}$$

Per tant, el valor de a és $\boxed{\frac{3}{2}}$.

- b) Per al valor a de l'apartat anterior, dibuixeu les corbes $y = h(x)$ i $y = h'(x)$. (2 punts)

Funció $y = h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$

1. Domini i Recorregut

- **Domini:** La funció $h(x)$ és un polinomi de segon grau, per tant, el domini és tot $\mathbb{R}$ (tots els nombres reals).
- **Recorregut:** Com que és una paràbola oberta cap amunt (coeficient de x^2 positiu), el recorregut va des del valor mínim de la funció fins a ∞ .

2. Punts de tall amb els eixos

- **Eix y** (quan $x = 0$):
$$h(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 + 0^2 = 0$$

Punt de tall: $(0, 0)$
- **Eix x** (quan $y = 0$):
$$0 = \frac{3}{2}x + x^2$$

$$x(x + \frac{3}{2}) = 0$$

Solucions: $x = 0$ i $x = -\frac{3}{2}$
Punts de tall: $(0, 0)$ i $(-\frac{3}{2}, 0)$

3. Simetria

- **Simetria:** La funció no és ni parella ni imparella. No té simetria respecte a l'origen ni respecte a l'eix y .

4. Monotonia i Extrems

- **Derivada primera:**
$$h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$$
- **Crítics i monotonia:**
$$\frac{3}{2} + 2x = 0 \implies x = -\frac{3}{4}$$

Aquest és un mínim relatiu.

- Per $x < -\frac{3}{4}$, $h'(x) < 0$ (funció decreixent).
- Per $x > -\frac{3}{4}$, $h'(x) > 0$ (funció creixent).

- **Valor mínim:**

$$h\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{16} = -\frac{9}{16}$$

5. Periodicitat

- La funció $h(x)$ no és periòdica.

6. Branques infinites (Asímtotes)

- La funció $h(x)$ no té asímtotes verticals, horitzontals ni obliqües.

Funció $y = h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

1. Domini i Recorregut

- **Domini:** La funció $h'(x)$ és lineal, per tant, el domini és tot $\mathbb{R}$.
- **Recorregut:** Com que és una funció lineal, el recorregut també és tot $\mathbb{R}$.

2. Punts de tall amb els eixos

- **Eix y** (quan $x = 0$):

$$h'(0) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Punt de tall: } \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

- **Eix x** (quan $y = 0$):

$$0 = \frac{3}{2} + 2x$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Punt de tall: } \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

3. Simetria

- **Simetria:** La funció no és ni parella ni imparella.

4. Monotonia i Extrems

- **Derivada:**

$$h''(x) = 2$$

Com que $h''(x)$ és constant i positiva, $h'(x)$ és sempre creixent.

5. Periodicitat

- La funció $h'(x)$ no és periòdica.

6. Branques infinites (Asímtotes)

- La funció $h'(x)$ no té asímtotes verticals, horitzontals ni obliqües.

Resum de les característiques

$$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$$

- Domini: $\mathbb{R}$
- Recorregut: $[-\frac{9}{16}, \infty)$
- Punts de tall: $(0, 0)$, $(-\frac{3}{2}, 0)$
- Mínim relatiu: $x = -\frac{3}{4}$, valor mínim $-\frac{9}{16}$
- Monotonia: Decreixent per $x < -\frac{3}{4}$, creixent per $x > -\frac{3}{4}$
- Simetria: Cap
- Periodicitat: Cap
- Assimptotes: Cap

$$h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$$

- Domini: $\mathbb{R}$
- Recorregut: $\mathbb{R}$
- Punts de tall: $(0, \frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{4}, 0)$
- Monotonia: Sempre creixent
- Simetria: Cap
- Periodicitat: Cap
- Assimptotes: Cap

Gràfiques de $h(x)$ i $h'(x)$



c) Calculeu l'àrea del pla compresa entre totes dues corbes.

(5 punts)

1. Trobar els punts d'intersecció

Iguallem les dues funcions:

$$\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x$$

Reordenem l'equació:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 2x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

Resolem aquesta equació de segon grau utilitzant la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, on $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, i $c = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}}{2 \cdot 1} \\
 x &= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}}{2} \\
 x &= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}}{2} \\
 x &= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}}{2} \\
 x &= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} \\
 x &= \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}
 \end{aligned}$$

Això ens dona dos valors de x :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\
 x &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{2} = \frac{-2}{2} = -1
 \end{aligned}$$

Els punts d'intersecció són $x = -1$ i $x = \frac{3}{2}$.

2. Calculant l'àrea entre les corbes

Per trobar l'àrea compresa entre les dues corbes entre aquests punts d'intersecció, integrem la diferència de les funcions $h'(x)$ i $h(x)$ des de $x = -1$ fins a $x = \frac{3}{2}$:

$$\text{Àrea} = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} [h'(x) - h(x)] \, dx$$

Substituïm les funcions:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{3}{2} + 2x \\
 h(x) &= \frac{3}{2}x + x^2
 \end{aligned}$$

Així, la diferència és:

$$\begin{aligned}
 h'(x) - h(x) &= \left(\frac{3}{2} + 2x\right) - \left(\frac{3}{2}x + x^2\right) = \frac{3}{2} + 2x - \frac{3}{2}x - x^2 \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - x^2
 \end{aligned}$$

Ara integrem aquesta expressió des de $x = -1$ fins a $x = \frac{3}{2}$:

$$\text{Àrea} = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - x^2 \right) dx$$

Calculem aquesta integral pas a pas:

1. La integral de $\frac{3}{2}$:

$$\int \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}x$$

2. La integral de $\frac{1}{2}x$:

$$\int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{4}x^2$$

3. La integral de $-x^2$:

$$\int -x^2 dx = -\frac{x^3}{3}$$

Així que:

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - x^2 \right) dx = \left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{\frac{3}{2}}$$

Avaluem aquesta expressió en els límits donats:

Per $x = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^3}{3} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} - \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{24} \\ &= \frac{54}{24} + \frac{27}{48} - \frac{27}{24} \\ &= \frac{108}{48} + \frac{27}{48} - \frac{54}{48} \\ &= \frac{81}{48} \end{aligned}$$

Per $x = -1$:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{4}(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{12} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{18}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \\ &= -\frac{18}{12} + \frac{7}{12} \\ &= -\frac{11}{12} \end{aligned}$$

Finalment, resta els dos valors:

$$\text{Àrea} = \frac{81}{48} - \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{81}{48} + \frac{44}{48} = \frac{125}{48}$$

Per obtenir un decimal aproximat amb quatre decimals significatius:

$$\text{Àrea} \approx \frac{125}{48} \approx 2,6042$$

Així, l'àrea compresa entre les dues corbes és $\frac{125}{48}$ o aproximadament 2,6042 unitats quadrades.