

Problema 5. Un institut té estudiants d'ESO i de Batxillerat. L'institut ofereix tres extraescolars: dues d'esportives (futbol i bàsquet) i una de no esportiva (música); tots els estudiants han de triar una extraescolar, però només una. L'institut té en total 400 estudiants, i 300 d'aquests estudiants han triat futbol. L'institut té 310 estudiants d'ESO, dels quals 230 han triat futbol i 60 han triat bàsquet. Se sap també que 8 estudiants de Batxillerat han triat música. Seleccionem a l'atzar un estudiant d'aquest institut.

- a) Calculeu la probabilitat de la unió dels successos "l'estudiant cursa l'ESO" i "l'estudiant ha triat música". (3 punts)

Dades proporcionades:

- Total d'estudiants: 400
- Estudiants que han triat futbol: 300
- Estudiants d'ESO: 310
- Estudiants d'ESO que han triat futbol: 230
- Estudiants d'ESO que han triat bàsquet: 60
- Estudiants de Batxillerat que han triat música: 8

Primer, calculem les dades que falten:

1. Estudiants d'ESO que han triat música:

$$\text{Estudiants d'ESO que han triat música} = 310 - (230 + 60) = 310 - 290 = 20$$

2. Estudiants de Batxillerat:

$$\text{Estudiants de Batxillerat} = 400 - 310 = 90$$

3. Estudiants de Batxillerat que han triat futbol:

$$\text{Estudiants de Batxillerat que han triat futbol} = 300 - 230 = 70$$

4. Estudiants de Batxillerat que han triat bàsquet:

$$\text{Estudiants de Batxillerat que han triat bàsquet} = 90 - (70 + 8) = 12$$

Ara, podem calcular les probabilitats:

- $P(\text{ESO})$: Probabilitat que un estudiant cursi l'ESO:

$$P(\text{ESO}) = \frac{310}{400}$$

- $P(\text{Música})$: Probabilitat que un estudiant hagi triat música:

$$P(\text{Música}) = \frac{20 + 8}{400} = \frac{28}{400}$$

- $P(\text{ESO} \cap \text{Música})$: Probabilitat que un estudiant cursi l'ESO i hagi triat música:

$$P(\text{ESO} \cap \text{Música}) = \frac{20}{400}$$

Finalment, calculem la probabilitat de la unió dels successos "l'estudiant cursa l'ESO" i "l'estudiant ha triat música":

$$P(\text{ESO} \cup \text{Música}) = P(\text{ESO}) + P(\text{Música}) - P(\text{ESO} \cap \text{Música})$$

Substituint els valors calculats:

$$P(\text{ESO} \cup \text{Música}) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{310 + 28 - 20}{400} = \frac{318}{400}$$

Simplifiquem la fracció:

$$\frac{318}{400} = \frac{159}{200}$$

Així, la probabilitat de la unió dels successos "l'estudiant cursa l'ESO" i "l'estudiant ha triat música" és $\frac{159}{200}$.

Expressant-ho amb decimals amb coma:

$$P(ESO \cup Música) = \frac{159}{200} = 0,795$$

Per tant, la probabilitat en forma de fracció és $\frac{159}{200}$ i en decimals amb coma és 0,795.

- b) Si sabem que l'estudiant seleccionat ha triat una extraescolar esportiva, quina és la probabilitat que curse l'ESO? (4 punts)

Per trobar la probabilitat que un estudiant cursi l'ESO donat que ha triat una extraescolar esportiva, utilitzarem la probabilitat condicionada.

Primer, cal identificar quants estudiants han triat extraescolars esportives (futbol o bàsquet):

1. Estudiants d'ESO que han triat extraescolars esportives:

Estudiants d'ESO que han triat extraescolars esportives = Estudiants d'ESO que han triat futbol + Estudiants d'ESO que han triat bàsquet = $230 + 60 = 290$

2. Estudiants de Batxillerat que han triat extraescolars esportives:

Estudiants de Batxillerat que han triat extraescolars esportives =
= Estudiants de Batxillerat que han triat futbol + Estudiants de Batxillerat que han triat bàsquet = $70 + 12 = 82$

3. Total d'estudiants que han triat extraescolars esportives:

Total d'estudiants que han triat extraescolars esportives =

$$= 290(\text{ESO}) + 82(\text{Batxillerat}) = 372$$

Ara calculem la probabilitat condicionada que un estudiant cursi l'ESO donat que ha triat una extraescolar esportiva:

$$P(\text{ESO} \mid \text{Esportiva}) = \frac{P(\text{ESO} \cap \text{Esportiva})}{P(\text{Esportiva})}$$

- **P(ESO ∩ Esportiva):** Probabilitat que un estudiant cursi l'ESO i hagi triat una extraescolar esportiva:

$$P(\text{ESO} \cap \text{Esportiva}) = \frac{\text{Estudiants d'ESO que han triat extraescolars esportives}}{\text{Total d'estudiants}} = \frac{290}{400}$$

- **P(Esportiva):** Probabilitat que un estudiant hagi triat una extraescolar esportiva:

$$P(\text{Esportiva}) = \frac{\text{Total d'estudiants que han triat extraescolars esportives}}{\text{Total d'estudiants}} = \frac{372}{400}$$

Substituint els valors:

$$P(\text{ESO} \mid \text{Esportiva}) = \frac{\frac{290}{400}}{\frac{372}{400}} = \frac{290}{372}$$

Simplifiquem la fracció:

$$\frac{290}{372} = \frac{145}{186}$$

Així, la probabilitat que un estudiant cursi l'ESO donat que ha triat una extraescolar esportiva és $\frac{145}{186}$.

$$P(\text{ESO} \mid \text{Esportiva}) = \frac{145}{186} \approx 0,7796$$

- c) Són independents els successos "l'estudiant cursa el Batxillerat" i "l'estudiant no ha triat bàsquet"? (3 punts)

Per determinar si els successos "l'estudiant cursa el Batxillerat" i "l'estudiant no ha triat bàsquet" són independents, cal comprovar si:

$$P(\text{Batxillerat} \cap \text{No Bàsquet}) = P(\text{Batxillerat}) \cdot P(\text{No Bàsquet})$$

Pas 1: Calcular les probabilitats individuals

1. Probabilitat que un estudiant cursi el Batxillerat ($P(\text{Batxillerat})$):

$$P(\text{Batxillerat}) = \frac{\text{Estudiants de Batxillerat}}{\text{Total d'estudiants}} = \frac{90}{400} = 0,225$$

2. Probabilitat que un estudiant no hagi triat bàsquet ($P(\text{No Bàsquet})$):

Primer, calculem la probabilitat que un estudiant hagi triat bàsquet:

$$\begin{aligned} \text{Estudiants que han triat bàsquet} &= \text{Estudiants d'ESO que han triat bàsquet} + \\ &+ \text{Estudiants de Batxillerat que han triat bàsquet} = 60 + 12 = 72 \end{aligned}$$

$$P(\text{Bàsquet}) = \frac{72}{400} = 0,18$$

Per tant, la probabilitat que un estudiant no hagi triat bàsquet és:

$$P(\text{No Bàsquet}) = 1 - P(\text{Bàsquet}) = 1 - 0,18 = 0,82$$

Pas 2: Calcular la probabilitat conjunta ($P(\text{Batxillerat} \cap \text{No Bàsquet})$)

Necessitem la probabilitat que un estudiant cursi el Batxillerat i no hagi triat bàsquet.

1. Estudiants de Batxillerat que no han triat bàsquet:

$$\begin{aligned} \text{Estudiants de Batxillerat que no han triat bàsquet} &= \text{Estudiants de Batxillerat} - \\ &- \text{Estudiants de Batxillerat que han triat bàsquet} = 90 - 12 = 78 \end{aligned}$$

$$P(\text{Batxillerat} \cap \text{No Bàsquet}) = \frac{78}{400} = 0,195$$

Pas 3: Verificar la independència

Comprovem si:

$$P(\text{Batxillerat} \cap \text{No Bàsquet}) = P(\text{Batxillerat}) \cdot P(\text{No Bàsquet})$$

Substituint els valors:

$$P(\text{Batxillerat}) \cdot P(\text{No Bàsquet}) = 0,225 \cdot 0,82 = 0,1845$$

Comparant amb $P(\text{Batxillerat} \cap \text{No Bàsquet})$:

$$P(\text{Batxillerat} \cap \text{No Bàsquet}) = 0,195$$

Com $0,195 \neq 0,1845$, els successos no són independents.

Conclusió:

Els successos "l'estudiant cursa el Batxillerat" i "l'estudiant no ha triat bàsquet" no són independents, ja que la probabilitat conjunta no és igual al producte de les probabilitats individuals.