Problema 5 juny 2024 País Valencià (anàlisi MAT).

Problema 5. Siga la funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ en què k és un paràmetre real. Es demana:

a) Obtenir el domini i les asímptotes de $f(x)$. (3 punts)

Donada la funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$, on k és un paràmetre real.

a) Obtenir el domini i les asímptotes de $f(x)$

Domini de $f(x)$:

La funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ està definida per a tots els valors de x reals, ja que no hi ha cap valor de x que faci que el denominador sigui zero o que presenti una indeterminació. Així doncs, el domini de $f(x)$ és:

$\text{Domini} = \mathbb{R}$

Asímptotes de $f(x)$:

Per determinar les asímptotes, analitzem el comportament de la funció quan x tendeix a $+\infty$ i $-\infty$.

1. **Asímptota horitzontal:**

   Per trobar una asímptota horitzontal, calculem el límit de $f(x)$ quan x tendeix a $+\infty$ i $-\infty$:

   - Quan $x \to +\infty$:
     $\lim_{x \to +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx}{e^{2x}}$

     Fem servir la regla de l'Hospital perquè tenim una indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$:

     $\lim_{x \to +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k}{2e^{2x}} = 0$

     Per tant, $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

- Quan $x \to -\infty$:
  $\lim_{x \to -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{kx}{e^{2x}}$

  Observem que el denominador e^{2x} creix exponencialment mentre el numerador kx decreix linealment. Això fa que el quocient també tendeixi a zero:

  $\lim_{x \to -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = 0$

  Per tant, $y = 0$ també és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

2. **Asímptota vertical:**

   Per comprovar si hi ha alguna asímptota vertical, cal veure si existeix algun valor de x on la funció no està definida o tendeix a $\pm\infty$. En aquest cas, no hi ha cap valor de x per al qual la funció no estigui definida, ja que e^{2x} mai no és zero. Així doncs, la funció no té asímptotes verticals.

3. **Asímptotes obliqües:**

   Per determinar si hi ha asímptotes obliqües, hem d'analitzar el comportament de la funció quan x tendeix a $\pm\infty$ i veure si podem expressar $f(x)$ en la forma $y = mx + b$ per algun valor de m i b.

   En general, una asímptota obliqua es dona si el límit següent és finit i diferent de zero:
   $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$

   Analitzem el comportament de $f(x)$ per $x \to \infty$:

   - Com $x \to \infty$:
     $\lim_{x \to \infty} \frac{kx}{e^{2x}} = 0$

     Com $f(x) \to 0$ quan $x \to \infty$, no hi ha cap terme lineal dominant a la funció, la qual cosa significa que no hi ha una asímptota obliqua quan $x \to \infty$.

- Quan $x \to -\infty$:
  $\lim_{x\to-\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = 0$

  Similarment, quan $x \to -\infty$, $f(x)$ també tendeix a 0, el que significa que no hi ha cap terme lineal dominant que indiqui la presència d'una asímptota obliqua.

Resum final:

- **Domini de $f(x)$:** $\mathbb{R}$
- **Asímptotes horitzontals:** $y = 0$
- **Asímptotes verticals:** No n'hi ha
- **Asímptotes obliqües:** No n'hi ha

b) Estudiar els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i els seus màxims i mínims. (5 punts)

Donada la funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$, on k és un paràmetre real, calculem la derivada de $f(x)$:

$f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$

Utilitzem la regla del quocient per derivar:

$f'(x) = \frac{(e^{2x}\cdot k)-(kx\cdot 2e^{2x})}{(e^{2x})^2}$
$f'(x) = \frac{ke^{2x}-2kxe^{2x}}{e^{4x}}$
$f'(x) = \frac{ke^{2x}(1-2x)}{e^{4x}}$
$f'(x) = \frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

Ara trobem els punts crítics de $f(x)$ resolent l'equació $f'(x) = 0$:

$\frac{k(1-2x)}{e^{2x}} = 0$
$k(1-2x) = 0$
$1 - 2x = 0$
$x = \frac{1}{2}$

Aquest és l'únic punt crític de $f(x)$. Ara, analitzem el signe de $f'(x)$ a cada costat d'aquest punt crític per determinar els intervals de creixement i decreixement depenent del valor de k.

- Per $k > 0$:
  - Per $x < \frac{1}{2}$:

    $f'(x) = \frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

    Si $x < \frac{1}{2}$, $1 - 2x > 0$. Així, $f'(x) > 0$, i la funció és creixent en aquest interval.
  - Per $x > \frac{1}{2}$:

    $f'(x) = \frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

    Si $x > \frac{1}{2}$, $1 - 2x < 0$. Així, $f'(x) < 0$, i la funció és decreixent en aquest interval.

  Així doncs, per $k > 0$, $f(x)$ és creixent en $(-\infty, \frac{1}{2})$ i decreixent en $(\frac{1}{2}, +\infty)$. El punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim relatiu.

- Per $k < 0$:
  - Per $x < \frac{1}{2}$:

    $f'(x) = \frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

    Si $x < \frac{1}{2}$, $1 - 2x > 0$. Així, $f'(x) < 0$, i la funció és decreixent en aquest interval.
  - Per $x > \frac{1}{2}$:

    $f'(x) = \frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

    Si $x > \frac{1}{2}$, $1 - 2x < 0$. Així, $f'(x) > 0$, i la funció és creixent en aquest interval.

  Així doncs, per $k < 0$, $f(x)$ és decreixent en $(-\infty, \frac{1}{2})$ i creixent en $(\frac{1}{2}, +\infty)$. El punt $x = \frac{1}{2}$ és un mínim relatiu.

- Per $k = 0$:

  En aquest cas, $f(x) = \frac{0 \cdot x}{e^{2x}} = 0$. Per tant, la funció és constantment zero.

  - La funció és constant $f(x) = 0$ en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$.
  - No hi ha màxims ni mínims relatius.

Per determinar si el punt crític $x = \frac{1}{2}$ és un màxim o un mínim, observem el canvi de signe de la derivada:

- Si $k > 0$, $f'(x)$ canvia de positiu a negatiu en $x = \frac{1}{2}$, per tant, $x = \frac{1}{2}$ és un màxim relatiu.
- Si $k < 0$, $f'(x)$ canvia de negatiu a positiu en $x = \frac{1}{2}$, per tant, $x = \frac{1}{2}$ és un mínim relatiu.
- Si $k = 0$, la funció és constant i no té màxims ni mínims relatius.

Per trobar el valor de la funció en aquest punt crític:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k \cdot \frac{1}{2}}{e^{2 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{k}{2}}{e} = \frac{k}{2e}$$

Resum final:

- Per $k > 0$:
  - **Intervalls de creixement:** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
  - **Intervalls de decreixement:** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
  - **Màxim relatiu:** $x = \frac{1}{2}$ amb valor $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2e}$

- Per $k < 0$:
  - **Intervalls de decreixement:** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
  - **Intervalls de creixement:** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
  - **Mínim relatiu:** $x = \frac{1}{2}$ amb valor $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2e}$

- Per $k = 0$:
  - **Funció constant:** $f(x) = 0$ en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$
  - **No hi ha màxims ni mínims relatius.**

c) Justificar que la funció sempre s'anul·la en algun punt de l'interval [-1, 1]. (2 punts)

Per justificar que la funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ s'anul·la en algun punt de l'interval $[-1, 1]$, utilitzarem el teorema de Bolzano, que estableix que si una funció contínua canvia de signe en un interval tancat, llavors existeix almenys un punt en aquest interval on la funció s'anul·la.

Teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano diu que si f és una funció contínua en l'interval $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix almenys un punt c en (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Aplicació a la funció $f(x)$

La funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ és contínua en tot $\mathbb{R}$, ja que està definida per a tot x.

Considerem els valors de $f(x)$ en els extrems de l'interval $[-1, 1]$:

$$f(-1) = \frac{k(-1)}{e^{-2}} = -\frac{k}{e^{-2}} = -\frac{ke^2}{1} = -ke^2$$

$$f(1) = \frac{k(1)}{e^2} = \frac{k}{e^2}$$

Anàlisi dels signes

- Si $k > 0$:
  - $f(-1) = -ke^2 < 0$
  - $f(1) = \frac{k}{e^2} > 0$
- Si $k < 0$:
  - $f(-1) = -ke^2 > 0$
  - $f(1) = \frac{k}{e^2} < 0$
- Si $k = 0$:
  - $f(x) = 0$ per a tot x

En els casos en què $k \neq 0$, veiem que $f(-1)$ i $f(1)$ tenen signes oposats. Això implica que $f(x)$ canvia de signe en l'interval $[-1, 1]$.

Conclusió

Per $k \neq 0$, com que $f(x)$ és contínua i canvia de signe en l'interval $[-1, 1]$, pel teorema de Bolzano, hi ha almenys un punt c en $[-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

Per $k = 0$, la funció $f(x) = 0$ en tot l'interval, per tant també s'anul·la en tots els punts de $[-1, 1]$.

Per tant, hem demostrat que la funció $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ s'anul·la en algun punt de l'interval $[-1, 1]$ per qualsevol valor de k.