

Problema 5. Un 30 % dels directius d'una empresa sap anglès i alemany. En aquesta empresa, el 40 % dels directius sap anglès. A més, dels directius que saben alemany, el 40 % sap també anglès. Seleccionem un directiu a l'atzar.

a) Quina probabilitat hi ha que el directiu sàpia alemany? (3 punts)

Per trobar la probabilitat que un directiu sàpia alemany, anomenada $P(B)$, utilitzem la informació donada:

1. La probabilitat que un directiu sàpia anglès i alemany és $P(A \cap B) = 0,30$.
2. La probabilitat que un directiu sàpia anglès és $P(A) = 0,40$.
3. La probabilitat que un directiu sàpia anglès donat que sap alemany és $P(A | B) = 0,40$.

Utilitzem la fórmula de la probabilitat condicional:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Substituïm els valors coneguts:

$$0,40 = \frac{0,30}{P(B)}$$

Resolent per $P(B)$:

$$P(B) = \frac{0,30}{0,40}$$

$$P(B) = 0,75$$

Per tant, la probabilitat que un directiu sàpia alemany és 0,75 o 75%.

b) Quina probabilitat hi ha que el directiu sàpia alemany i no anglès? (3 punts)

Per trobar la probabilitat que un directiu sàpiga alemany i no anglès, anomenem aquest esdeveniment $B \cap A^c$, on A^c és l'esdeveniment complementari a A (saber anglès).

Sabem que:

1. $P(A \cap B) = 0,30$ (probabilitat que un directiu sàpiga anglès i alemany).
2. $P(B) = 0,75$ (probabilitat que un directiu sàpiga alemany).

Per trobar $P(B \cap A^c)$, utilitzarem la regla de la probabilitat total per a B :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

On $P(A^c \cap B)$ és la probabilitat que un directiu sàpiga alemany i no anglès. Sabem que:

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Substituïm els valors coneguts:

$$P(A^c \cap B) = 0,75 - 0,30$$

$$P(A^c \cap B) = 0,45$$

Per tant, la probabilitat que un directiu sàpiga alemany i no anglès és 0,45 o 45%.

c) Si el directiu no sap alemany, quina és la probabilitat que sàpia anglès? (4 punts)

Per trobar la probabilitat que un directiu sàpiga anglès donat que no sap alemany, anomenem aquest esdeveniment $A \mid B^c$, on B^c és l'esdeveniment complementari a B (no saber alemany).

Utilitzarem la fórmula de la probabilitat condicional:

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

On:

- $P(A \cap B^c)$ és la probabilitat que un directiu sàpiga anglès i no alemany.
- $P(B^c)$ és la probabilitat que un directiu no sàpiga alemany.

Ja sabem que:

1. $P(A) = 0,40$ (probabilitat que un directiu sàpiga anglès).
2. $P(B) = 0,75$ (probabilitat que un directiu sàpiga alemany).

Podem trobar $P(B^c)$ així:

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

$$P(B^c) = 1 - 0,75$$

$$P(B^c) = 0,25$$

Ara, necessitem trobar $P(A \cap B^c)$. Utilitzarem la següent relació:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

On $P(A \cap B) = 0,30$. Per tant:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B^c) = 0,40 - 0,30$$

$$P(A \cap B^c) = 0,10$$

Finalment, substituïm aquests valors a la fórmula de la probabilitat condicional:

$$P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$P(A \mid B^c) = \frac{0,10}{0,25}$$

$$P(A \mid B^c) = 0,40$$

Per tant, la probabilitat que un directiu sàpiga anglès donat que no sap alemany és 0,40 o 40%.