Problema 5 model 1 juliol 2024 Illes Balears (anàlisi MACS).

P5. — Segons un estudi de mercat, la quantitat de gent que assistirà a un espectacle, g (en nombre de persones), en funció del preu de l'entrada, p (en €), serà la següent:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p, & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0, & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

a) Quin és el domini de $g(p)$? És aquesta funció contínua? **(3 pt)**

1. Domini de la funció $g(p)$

La funció $g(p)$ es defineix com segueix:

$$g(p) = \begin{cases} 500 & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0 & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

Domini de $g(p)$:

La funció està definida per a $p = 0$, $0 < p < 100$, i $p = 100$. Així, el domini de $g(p)$ és:

$$0 \leq p \leq 100$$

2. Contínua o no

Per verificar la continuïtat, analitzem els punts on la definició de la funció canvia, és a dir, en $p = 0$ i $p = 100$:

- **En $p = 0$:**
  - $g(0) = 500$.
  - Per $0 < p < 100$, $g(p) = 300 - 3p$.
  - Verifiquem el límit quan p s'aproxima a 0 des de la dreta:

$$\lim_{p \to 0^+} g(p) = \lim_{p \to 0^+} (300 - 3p) = 300$$

  Com $g(0) = 500$ i el límit és 300, hi ha un salt, així que la funció **no és contínua en $p = 0$.**

- **En $p = 100$:**
  - $g(100) = 0$.
  - Per $0 < p < 100$, $g(p) = 300 - 3p$.
  - Verifiquem el límit quan p s'aproxima a 100 des de l'esquerra:

$$\lim_{p \to 100^-} g(p) = \lim_{p \to 100^-} (300 - 3p) = 300 - 3 \cdot 100 = 0$$

  Com $g(100) = 0$ i el límit és 0, la funció és **contínua en $p = 100$**.

Resum

- **Domini de $g(p)$:** $0 \leq p \leq 100$
- **Contínua o no:**
  - La funció **no és contínua en $p = 0$**.
  - La funció **és contínua en $p = 100$**.

Resposta

$$\boxed{\text{Domini: } 0 \leq p \leq 100}$$

$$\boxed{\text{La funció no és contínua en } p = 0\text{, però és contínua en } p = 100.}$$

b) Segons l'estudi de mercat, si hi assisteixen 240 persones, quin haurà estat el preu de l'entrada? **(2 pt)**

Per determinar el preu de l'entrada que permetrà que assisteixin 240 persones, utilitzarem la funció de quantitat de gent que assisteix en funció del preu p:

$$g(p) = \begin{cases} 500 & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0 & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

Volguem trobar el preu p tal que $g(p) = 240$. Anem a considerar el cas en què $0 < p < 100$, ja que en aquest rang la funció és $g(p) = 300 - 3p$.

Resolució

Per a $0 < p < 100$:

$$g(p) = 300 - 3p$$

Volem que $g(p) = 240$:

$$300 - 3p = 240$$

$$300 - 240 = 3p$$

$$60 = 3p$$

$$p = \frac{60}{3} = 20$$

Verificació

Verifiquem que aquest preu és vàlid dins del rang de la funció $0 < p < 100$:

- Per a $p = 20$, tenim:

$$g(20) = 300 - 3 \cdot 20 = 300 - 60 = 240$$

Així que $p = 20$ és vàlid.

Resposta

El preu de l'entrada per al qual assistiran 240 persones és:

$$\boxed{20\ €}$$

c) Els ingressos són el producte del preu per la quantitat de gent que hi assitirà. Segons l'estudi, quin preu maximitza els ingressos? **(5 pt)**

Per trobar el preu que maximitza els ingressos, hem de calcular els ingressos en funció del preu i després trobar el valor de p que maximitza aquesta funció.

Ingressos

Els ingressos $I(p)$ són el producte del preu p i la quantitat de gent $g(p)$:

$$I(p) = p \cdot g(p)$$

La funció de quantitat de gent $g(p)$ es defineix com:

$$g(p) = \begin{cases} 500 & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0 & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

Anem a calcular els ingressos en els dos intervals on la funció $g(p)$ es defineix linealment:

1. **Per a $0 < p < 100$:**

   En aquest interval, la funció $g(p)$ és $300 - 3p$. Així, els ingressos són:

   $$I(p) = p \cdot (300 - 3p)$$

   Simplifiquem:

   $$I(p) = 300p - 3p^2$$

   Aquesta és una funció quadràtica en forma de $I(p) = -3p^2 + 300p$, que és una paràbola amb coeficient de p^2 negatiu, així que té un màxim.

   La forma general d'una paràbola $ax^2 + bx + c$ té el màxim (o mínim) en $x = -\frac{b}{2a}$. En aquest cas, $a = -3$ i $b = 300$:

   $$p_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{300}{2(-3)} = \frac{300}{6} = 50$$

2. **Verificació per als altres intervals:**

   - **Per a $p = 0$:**

     $$I(0) = 0 \cdot g(0) = 0 \cdot 500 = 0$$

   - **Per a $p = 100$:**

     $$I(100) = 100 \cdot g(100) = 100 \cdot 0 = 0$$

   Aquests dos casos no ens donaran el màxim dels ingressos perquè els ingressos en aquests punts són 0.

Resum

El preu que maximitza els ingressos és $p = 50$.

Ingressos màxims

Per calcular els ingressos màxims:

$$I(50) = 50 \cdot (300 - 3 \cdot 50) = 50 \cdot (300 - 150) = 50 \cdot 150 = 7500$$

Resposta

El preu que maximitza els ingressos és:

$$\boxed{50\ €}$$