

P5. — Resol els següents apartats:

- (a) [5 punts] Donada la funció $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina els valors de a i b sabent que $f(x)$ assoleix el seu màxim a $x = 100$ i que passa pel punt $(49, 91)$.

Per resoldre el problema de determinar els valors de a i b per a la funció $f(x) = ax + b\sqrt{x}$ donades les condicions que la funció assoleix el seu màxim a $x = 100$ i que passa pel punt $(49, 91)$, hem de seguir els següents passos:

1. Trobar la derivada i condició de màxim

La funció és $f(x) = ax + b\sqrt{x}$.

Derivada de $f(x)$

La derivada de $f(x)$ és:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (ax + b\sqrt{x})$$

La derivada és:

$$f'(x) = a + b \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Condició de màxim

La funció assoleix el seu màxim a $x = 100$. Això significa que la derivada en aquest punt ha de ser zero:

$$f'(100) = a + b \cdot \frac{1}{2\sqrt{100}} = 0$$

Substituïm $\sqrt{100} = 10$:

$$f'(100) = a + b \cdot \frac{1}{2 \cdot 10} = a + \frac{b}{20} = 0$$

Això ens dona:

$$a + \frac{b}{20} = 0 \quad (1)$$

2. Condició de pas pel punt (49, 91)

La funció passa pel punt (49, 91), així que:

$$f(49) = a \cdot 49 + b\sqrt{49} = 91$$

Substituïm $\sqrt{49} = 7$:

$$f(49) = a \cdot 49 + b \cdot 7 = 91$$

Això ens dona:

$$49a + 7b = 91 \quad (2)$$

3. Resoldre el sistema d'equacions

Resolguem el sistema format per les equacions (1) i (2).

Equació (1):

$$a + \frac{b}{20} = 0 \implies a = -\frac{b}{20}$$

Substituïm a a l'equació (2):

$$49 \left(-\frac{b}{20} \right) + 7b = 91$$

Simplifiquem:

$$-\frac{49b}{20} + 7b = 91$$

Convertim a una sola fracció:

$$-\frac{49b}{20} + \frac{140b}{20} = 91$$

$$\frac{91b}{20} = 91$$

Multipliquem per 20:

$$91b = 1820$$

$$b = \frac{1820}{91} = 20$$

Substituïm $b = 20$ a l'equació (1):

$$a + \frac{20}{20} = 0$$

$$a + 1 = 0$$

$$a = -1$$

Resposta

Els valors de a i b són:

$$a = -1$$

$$b = 20$$

(b) [5 punts] Donada la funció

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

indica quin és el seu domini. És $g(x)$ una funció contínua en el seu domini? Justifica la resposta i, en cas negatiu, indica quin tipus de discontinuïtat presenta.

Domini de $g(x)$

La funció donada és:

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1}$$

Per trobar el domini de $g(x)$, hem de considerar les restriccions següents:

1. El denominador no pot ser zero:

$$x^2 - 1 \neq 0$$

Això significa que:

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

2. El radicand dins de la funció $\sqrt{x}$ ha de ser no negatiu:

$$x \geq 0$$

Combinant aquestes dues condicions, obtenim:

$$x \geq 0 \quad \text{i} \quad x \neq 1$$

Per tant, el domini de $g(x)$ és:

$$D(g) = [0, \infty) \setminus \{1\}$$

Continuïtat de $g(x)$ en el seu domini

Examinem la continuïtat de $g(x)$ en el seu domini:

- ($g(x)$ serà contínua en el seu domini si no hi ha discontinuïtats evitables, salts o asímptotes verticals dins del domini.

1. Punt $x = 0$:

$$g(0) = \frac{(0-1)\sqrt{0}}{0^2-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

La funció és definida i contínua en $x = 0$.

2. **Punt $x = 1$:**

$x = 1$ no pertany al domini, per tant no es considera per la continuïtat dins del domini.

3. **Punts $x > 1$:**

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1}$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Això simplifica:

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{per } x > 1$$

Això és una funció contínua per $x > 1$.

Discontinuitat

El punt $x = 1$ no és al domini de $g(x)$. Per determinar la naturalesa de la discontinuïtat en $x = 1$, avaluem el límit quan x s'apropa a 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Quan x s'apropa a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Per tant, podem dir que el límit quan x s'apropa a 1 és finit. Això indica que la discontinuïtat en $x = 1$ és una **discontinuitat evitable**, ja que podem definir $g(1) = \frac{1}{2}$ per fer la funció contínua en aquest punt.

Resum

1. **Domini:**

$$D(g) = [0, \infty) \setminus \{1\}$$

2. **Continuïtat:**

- $g(x)$ és contínua en el seu domini.
- La funció presenta una discontinuïtat evitable en $x = 1$.

Definint $g(1) = \frac{1}{2}$, es podria fer $g(x)$ contínua en tot $\mathbb{R}^+$.