Problema 5 model 2 juny 2024 Illes Balears (anàlisi MACS).

P5. — Segons un model, la població d'una determinada ciutat, p (en milions d'habitants), depèn del temps que ha passat, t (en anys), des del començament de l'any 2000, segons la relació

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{per a } t \geq 0.$$

Et proporcionam la següent informació, que pots utilitzar si ho consideres oportú:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2}, \qquad \int p(t)\, \mathrm{d}t = 20 \cdot \ln\left(e^{0.2t} + 3\right) + C, \text{ per a qualsevol constant } C \in \mathbb{R}.$$

a) Quina població teníem al començament de l'any 2000 (és a dir, per a $t = 0$)? Quin any vàrem tenir exactament 2 milions d'habitants? **(3 pt)**

a) Població al començament de l'any 2000

Per trobar la població al començament de l'any 2000, hem de calcular $p(0)$. Segons la fórmula donada:

$p(t) = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2t}}$

Substituïm $t = 0$:

$p(0) = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2 \cdot 0}}$
$p(0) = \frac{4}{1+3 \cdot e^{0}}$
$p(0) = \frac{4}{1+3 \cdot 1}$
$p(0) = \frac{4}{4}$
$p(0) = 1 \text{ milió d'habitants}$

Per tant, al començament de l'any 2000, la població era de 1 milió d'habitants.

Quan la població era exactament 2 milions

Volem trobar el valor de t tal que $p(t) = 2$. Utilitzem la fórmula de $p(t)$:

$\frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2t}} = 2$

Resolem aquesta equació per t:

$$
\begin{aligned}
&4 = 2 \cdot (1 + 3 \cdot e^{-0,2t}) \\
&4 = 2 + 6 \cdot e^{-0,2t} \\
&4 - 2 = 6 \cdot e^{-0,2t} \\
&2 = 6 \cdot e^{-0,2t} \\
&\tfrac{2}{6} = e^{-0,2t} \\
&\tfrac{1}{3} = e^{-0,2t}
\end{aligned}
$$

Prenem el logaritme natural a ambdues bandes:

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(\tfrac{1}{3}\right) = -0,2t \\
&-\ln(3) = -0,2t \\
&\ln(3) = 0,2t \\
&t = \tfrac{\ln(3)}{0,2}
\end{aligned}
$$

Calculant aquest valor:

$t = \frac{\ln(3)}{0,2} \approx \frac{1,0986}{0,2} \approx 5,493$

Així que la població va arribar a 2 milions aproximadament 5,493 anys després de l'any 2000, el que correspon aproximadament a l'any 2005.

b) En quins intervals la població augmenta? En quins disminueix? **(3 pt)**

Per determinar en quins intervals la població augmenta o disminueix, hem d'analitzar la derivada $p'(t)$ de la funció $p(t)$. La població augmenta quan la derivada és positiva i disminueix quan la derivada és negativa.

La funció poblacional donada és:

$p(t) = \frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}$

I la derivada proporcionada és:

$p'(t) = \frac{2,4\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2}$

Analitzem aquesta derivada:

1. Significació de la Derivada

La derivada $p'(t)$ ens indica com canvia la població amb el temps:

- Si $p'(t) > 0$, la població augmenta.
- Si $p'(t) < 0$, la població disminueix.

En el cas de la funció proporcionada, $p'(t)$ té la forma:

$p'(t) = \frac{2,4\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2}$

2. Anàlisi de $p'(t)$

1. **Exponent $e^{-0,2t}$:**
   - El terme $e^{-0,2t}$ és sempre positiu per a qualsevol valor de $t \geq 0$ perquè $e^{-0,2t} > 0$ en tot moment.

2. **Denominador**:

   - El denominador $(1 + 3 \cdot e^{-0,2t})^2$ és també sempre positiu, ja que és el quadrat d'una suma de termes positius.

3. **Numerador:**

   - El numerador $2,4 \cdot e^{-0,2t}$ és positiu, ja que $e^{-0,2t}$ és positiu i $2,4$ és positiu.

Així, la derivada $p'(t)$ és sempre positiva per a qualsevol $t \geq 0$.

3. Conclusió

- **Intervals d'augment:** La derivada $p'(t)$ és positiva per a tots els $t \geq 0$. Per tant, la població augmenta en l'interval $[0, \infty)$.

- **Intervals de disminució**: La derivada $p'(t)$ no és negativa per a cap valor de $t \geq 0$. Per tant, no hi ha intervals en què la població disminueixi.

c) A què tendeix la població de la ciutat a llarg termini? A què tendeix el ritme de creixement de la població a llarg termini? **(4 pt)**

Per analitzar el comportament a llarg termini de la població i el ritme de creixement, hem de considerar els límits de $p(t)$ i $p'(t)$ quan t tendeix a l'infinit.

Comportament a llarg termini de la població

La funció de població és:

$p(t) = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2t}}$

Per trobar el límit de $p(t)$ a mesura que t tendeix a l'infinit, calculem:

$\lim_{t \to \infty} p(t)$

Observem que quan t tendeix a l'infinit, $e^{-0,2t}$ tendeix a 0. Així, la funció es simplifica:

$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}$
$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{4}{1+3\cdot 0}$
$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{4}{1}$
$\lim_{t\to\infty} p(t) = 4$

Per tant, a llarg termini, la població de la ciutat tendeix a 4 milions d'habitants.

Comportament a llarg termini del ritme de creixement

El ritme de creixement de la població és donat per la derivada:

$p'(t) = \frac{2,4\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2}$

Per trobar el límit de $p'(t)$ a mesura que t tendeix a l'infinit, calculem:

$\lim_{t\to\infty} p'(t)$

Quan t tendeix a l'infinit, $e^{-0,2t}$ tendeix a 0. Així, la funció de la derivada es simplifica com segueix:

$\lim_{t\to\infty} p'(t) = \frac{2,4\cdot e^{-0,2t}}{(1+3\cdot e^{-0,2t})^2}$
$\lim_{t\to\infty} p'(t) = \frac{2,4\cdot 0}{(1+3\cdot 0)^2}$
$\lim_{t\to\infty} p'(t) = \frac{0}{1^2}$
$\lim_{t\to\infty} p'(t) = 0$

Per tant, a llarg termini, el ritme de creixement de la població tendeix a 0.

Resum

- **La població de la ciutat tendeix a 4 milions d'habitants a llarg termini.**
- **El ritme de creixement de la població tendeix a 0 a llarg termini.**