

P5. — [10 punts] Volem fer una tanca en un camp rectangular emprant diferents materials a cada costat. Començant pel fons del camp i movent-nos al voltant d'aquest en el sentit contrari a les agulles del rellotge, el cost del material per a cada costat és de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m i 14 €/m, respectivament. Si hem de gastar exactament 1000 € per comprar el material de tancament, determina les dimensions del camp que maximitzaran l'àrea tancada.

1. Definir les variables

Denotem les dimensions del camp rectangular com x i y . Els costos per metre lineal dels costats són:

- Cost del costat amb longitud x és 6 €/m.
- Cost del costat amb longitud y és 9 €/m.
- Cost del costat amb longitud x és 12 €/m.
- Cost del costat amb longitud y és 14 €/m.

2. Formular la restricció del cost

La restricció del cost total és:

$$6x + 9y + 12x + 14y = 18x + 23y$$

Donat que el cost total és de 1000 €, tenim:

$$18x + 23y = 1000$$

3. Expressar l'àrea en termes d'una sola variable

L'àrea $A(x)$ del camp rectangular és:

$$A(x) = x \cdot y$$

Substituïm y en termes de x :

$$18x + 23y = 1000$$

$$23y = 1000 - 18x$$

$$y = \frac{1000 - 18x}{23}$$

Substituïm y en l'expressió de l'àrea:

$$A(x) = x \cdot \frac{1000 - 18x}{23}$$

$$A(x) = \frac{1000x - 18x^2}{23}$$

4. Maximitzar l'àrea

Derivem $A(x)$ respecte a x :

$$A'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1000x - 18x^2}{23} \right)$$

$$A'(x) = \frac{1000 - 36x}{23}$$

Iguallem la derivada a zero per trobar el màxim:

$$\frac{1000 - 36x}{23} = 0$$

$$1000 - 36x = 0$$

$$36x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{36} = \frac{250}{9} \approx 27,78$$

Substituïm $x = \frac{250}{9}$ en l'equació de y :

$$y = \frac{1000 - 18 \cdot \frac{250}{9}}{23}$$

$$y = \frac{1000 - \frac{4500}{9}}{23}$$

$$y = \frac{1000 - 500}{23}$$

$$y = \frac{500}{23} \approx 21,74$$

5. Verificar que és un màxim

La segona derivada $A''(x)$ és:

$$A''(x) = \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{-36}{23}$$

Com que $A''(x) < 0$, el valor de x trobat és un màxim local.

Resultats Finals

Les dimensions del camp que maximitzen l'àrea amb un cost total de 1000 € són:

- **Longitud x :** $\frac{250}{9}$ metres (aproximadament 27,78 metres)
- **Amplada y :** $\frac{500}{23}$ metres (aproximadament 21,74 metres)