

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Si anomenem I la matriu identitat d'ordre 2, trobeu el valor de a per al qual $A^2 = I$.
[1 punt]

Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igualem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1+2a = 1$ i per tant $a = 0$.

b) Per a $a = -1$, calculeu A^2 , A^3 i A^4 . Feu servir els càlculs anteriors per a deduir el valor de A^{-1} i de A^{23} .
[1,5 punts]

Per a $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.
D'altra banda,

$$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$$