

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de A^n . Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

Comencem calculant les diferents potències de A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Per tant, deduïm que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, per comprovar si la matriu de l'enunciat és la inversa de la matriu A^n , multipliquem les dues matrius per veure si obtenim la matriu identitat:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, efectivament, es tracta de la matriu inversa de A^n .

b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.

[1,25 punts]

Per resoldre l'equació matricial, comencem aïllant la matriu X respectant les normes del producte de matrius:

$$A^{10}X - A^{20} = A \Rightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Rightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}).$$

Utilitzant el que hem vist a l'apartat anterior, tenim, per tant, que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$